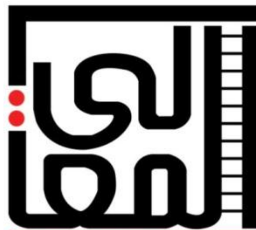


مذكرة التفوق
في الرياضيات البحتة

للصف الثاني الثانوي العلمي
الفصل الدراسي الثاني

إعداد الأستاذ
السيد عبد الكريم عرابي
موجه رياضيات



دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

أولاً :

الجبر

$$3x^2 - 2xy + c$$

2 1 2

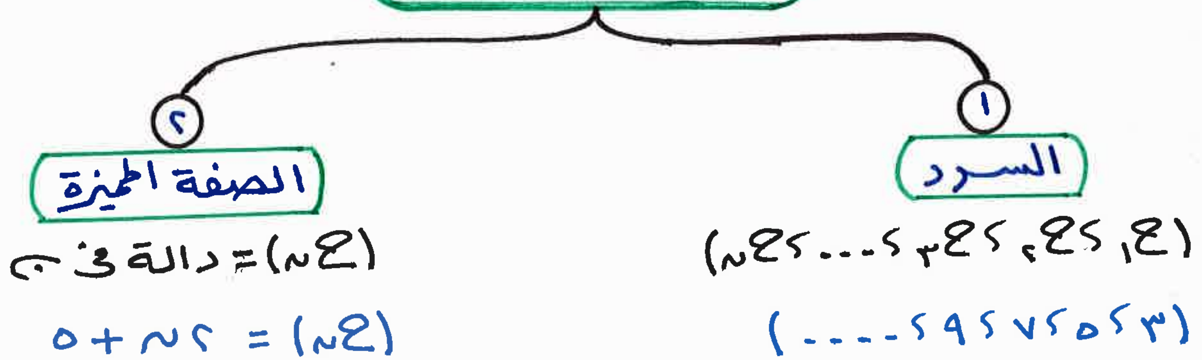
3 4 3 4 5



المتتابعات

المتتابعة الحقيقية هي دالة مجالها ص+ أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل ح

∴ د : {١ ، ٢ ، ٣ ، ....} ⟵ ح

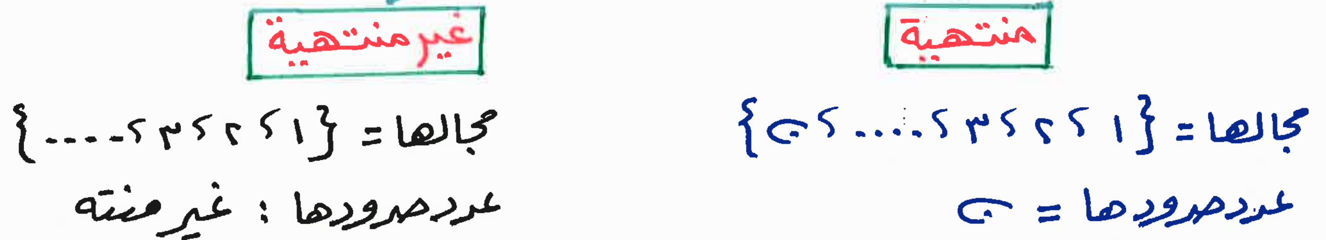


(ح١ ، ح٢ ، ح٣ ، ... ، حن)

(٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ....)

(حن) = دالة في ن

(حن) = ٢ن + ٥



منتهية: مجالها = {١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن} — عدد حدودها = ن

غير منتهية: مجالها = {١ ، ٢ ، ٣ ، ....} — عدد حدودها : غير منته

---

(١) المتتابعة هي دالة مجالها

(أ) ح+ (ب) ص (جـ) ص+ (د) ح

(٢) الحد الرابع في المتتابعة (حن) حيث حن = $\frac{ن٧}{ن+١}$ هو

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٣) في المتتابعة (حن) = ٣ن٢ − ١ إذا كان حن = ٧٤ فإن : ن =

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٤

④ في المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_{ن+١} = ن ح_ن$ ، $ن > ١$ إذا كان $ح_١ = ١$ فإن : $ح_٢ = ...$

ⓐ ١ ⓑ ٢ ⓒ ٣ ⓓ ٤

---

⑤ في المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = جا(\frac{ط}{٤} ن)$ حدها الخامس =

ⓐ ١ ⓑ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⓒ $\sqrt{٢}$ ⓓ $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

الحد العام للمتتابعة يرمز للحد العام للمتتابعة بالرمز $ح_ن$ حيث $ح_ن$ هو صورة العنصر الذى ترتيبه ن فى المتتابعة ويسمى بالحد النونى

تدريب٢ أكتب الحد العام من المتتابعات الآتية :-

① (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ....) $ح_ن =$

② (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) $ح_ن =$

③ $(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٤}{٥} ، ....)$ $ح_ن =$

④ $(-\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٥} ، \frac{-١}{٧} ، \frac{١}{٩} ، ....)$ $ح_ن =$

ملاحظات

① إذا إختلفت إشارة كل حد عن إشارة الحد التالى له مباشرة فإن المتتابعة تكون متتابعة تذبذبية

② متتابعة فيبوناتشى هى $(ح_ن) =$ (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ....)

قاعدتها هى $ح_{ن+٢} = ح_ن + ح_{ن+١}$ لكل $ن \in ص^+$ ، $ح_١ = ح_٢ = ١$

③ بعض المتتابعات ليس لها قاعدة معروفة وبالتالى ليس لها حد عام

④ سوف يتم شرح أنواع المتتابعات بعد ذلك ويتم إيجاد الحد العام بسهولة

بحث إطراد المتتابعة

لكل $ن \geq 1$ إذا كان :-

1) $ح_{ن+1} > ح_ن$ المتتابعة تزايدية

2) $ح_{ن+1} < ح_ن$ المتتابعة تناقصية

3) $ح_{ن+1} = ح_ن$ المتتابعة ثابتة

تدريب ٣

١) الحد النوني للمتتابعة (٢ ، ٢ ، $\frac{٨}{٣}$ ، ٤ ، ....) هو

أ) $ح_ن = ن - ١$ ب) $ح_ن = ٢ن - ١$ جـ) $ح_ن = ٢^{ن-١}$ د) $ح_ن = \frac{٢^ن}{ن}$

٢) الحد العام في المتتابعة (٢ ، -٤ ، ٦ ، -٨ ، ١٠ ، ....) هو $ح_ن =$

أ) $٢ن$ ب) $-٢ن$ جـ) $(-١)^ن \times ٢ن$ د) $(-١)^{ن+١} \times ٢ن$

٣) المتتابعة التي حدها النوني $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ تمثل ..

أ) متتابعة تزايدية ب) متتابعة تناقصية جـ) متتابعة ثابتة د) متتابعة تذبذبية

٤) يقال للمتتابعة $(ح_ن)$ أنها تزايدية لجميع قيم $ن \in ص^+$ اذا كان

أ) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+1}} > ١$ ب) $ح_ن = ح_{ن+1}$ جـ) $ح_{ن+1} > ح_ن$ د) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+1}} > -١$

٥) الحد الرابع في المتتابعة $(ح_ن) = ن^٢ + ٣$ هو

أ) ٤ ب) ٧ جـ) ١٦ د) ١٩

٦) الحد العام للمتتابعة ((١×٢) ، (٣×٤) ، (٤×٥) ، (٥×٦) ، ....) هو $ح_ن =$

أ) $(ن-١)(ن+١)$ ب) $(ن+١)(ن+٢)$ جـ) $ن(ن+١)$ د) $٢ن(ن+١)$

المتسلسلات

المتتابعة $(\text{ح}_{\text{ن}})$

قائمة مرتبة من الحدود

$(\text{ح}_1 ، \text{ح}_2 ، \text{ح}_3 ، \ldots ، \text{ح}_{\text{ن}})$ منتهية

$(\text{ح}_1 ، \text{ح}_2 ، \text{ح}_3 ، \ldots)$ غير منتهية

المتسلسلة $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}$

جمع حدود المتتابعة الخاصة بها

$$\text{ح}_1 + \text{ح}_2 + \cdots + \text{ح}_{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ح}_{\text{ر}})$$

$$\text{ح}_1 + \text{ح}_2 + \cdots = \sum_{\text{ر}=1}^{\infty} (\text{ح}_{\text{ر}})$$

تدريب ١

(١) $\sum_{\text{ر}=1}^{4} \text{ر}^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 30$

(٢) $\sum_{\text{ر}=1}^{7} (2\text{ر}-1) = (2\times1-1) + (2\times2-1) + (2\times3-1) + \cdots + (2\times7-1) = 49$

ملحوظة: يمكن إستخدام الآلة الحاسبة لايجاد المسائل السابقة

خواص عملية التجميع

(١) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ} = \text{أ} \times \text{ن}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$ $\Leftarrow$ $\sum_{\text{ر}=1}^{15} 3 = 3 \times 15 = 45$

(٢) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ}\,\text{ح}_{\text{ر}} = \text{أ} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}$ $\Leftarrow$ $\sum_{\text{ر}=1}^{4} 5\text{ر}^3 = 5 \sum_{\text{ر}=1}^{4} \text{ر}^3$

(٣) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ح}_{\text{ر}} \pm \text{ك}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}} \pm \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}$ $\Leftarrow$ $\sum_{\text{ر}=1}^{9} (2\text{ر}+3) = \sum_{\text{ر}=1}^{9} 2\text{ر} + \sum_{\text{ر}=1}^{9} 3$

(٤) $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ ⇐ $1+2+3+\dots+15 = \frac{15\times16}{2} = 120$

(٥) $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ⇐ $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = \frac{5(5+1)(10+1)}{6} = 55$

تدريب٢ أكتب مفكوك كل من المتسلسلات التالية:

(١) $\sum_{r=1}^{4} (r^2)$

المطلوب جمع ٤ حدود إبتداء من الحد الأول

بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

حاول تحل بطريقة أخرى

(٢) $\sum_{r=1}^{5} (3r-2)$

المطلوب جمع ٥ حدود إبتداء من الحد الأول

نضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$= (3-2) + (6-2) + (9-2) + (12-2) + (15-2) = 35$

حاول تحل بطريقة أخرى

تدريب٣ باستخدام خواص رمز التجميع ∑ أوجد قيمة $\sum_{r=8}^{12} 2(r+5)$

الحل

الشرح (i) عند استخدام خواص التجميع لازم عند ر = ١

(ii) علشان تعرف عدد الحدود التي يجب جمعها (ن − ر + ١)

(iii) في هذه المسألة لازم نجمع (١٢ − ٨ + ١) = ٥ حدود

$\therefore \sum_{r=8}^{12} 2(r+5) = \sum_{r=1}^{12} 2(r+5) - \sum_{r=1}^{7} 2(r+5)$

$= \sum_{r=1}^{12} 2r + \sum_{r=1}^{12} 10 - \sum_{r=1}^{7} 2r - \sum_{r=1}^{7} 10$

$= 2\times\frac{12(12+1)}{2} + 10\times12 - 2\times\frac{7(7+1)}{2} - 10\times7$

$\therefore \sum_{r=8}^{12} 2(r+5) = 150$

تدريب ٤ : إكتب المتسلسلات التالية مستخدماً رمز التجميع

١) ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ٢٠

الحل

الشرح (i) عدد الحدود ن = ٢٠

(ii) الحد العام للمتتابعة ح$_ر$ = ر

∴ = $\sum_{ر=١}^{٢٠}$ ر

٢) ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ...

الحل

الشرح (i) عدد الحدود ن = ∞

(ii) الحد العام ح$_ر$ = ٢ × $(\frac{١}{٢})^{ر-١}$

= $\sum_{ر=١}^{∞}$ ٢ × $(\frac{١}{٢})^{ر-١}$

تدريب طلبة

١) قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٤}$ ر^٢ = ...

أ) ٣٠ ب) ٣٢ جـ) ٢٨ د) ١٦

٢) قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=٧}^{٢٣}$ ٣ ر = ...

أ) ٢١٠ ب) ١٢٠ جـ) ٢٠١ د) ١٢٥

٣) $\sum_{ل=١}^{١٥}$ (ر^٢ + ر + ١) =

أ) ١٣٧٥ ب) ٣٧٢٠ جـ) ١٤٤٠٠ د) ٢٢٧٢٠٠٠

٤) المتسلسلة ١ + ٤ + ٩ + ١٦ تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة :

أ) $\sum_{ر=٧}^{١٦}$ (ر^٢) ب) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (ر^٢) جـ) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (ر) د) $\sum_{ر=٧}^{١٦}$ ر

٥) اذا كان ٣ + $\sum_{ر=١}^{٣}$ أ ر^٢ = ١١٥ فإن أ = ..

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٥ د) ١٠

المتتابعة الحسابية

* تسمى المتتابعة ($ح_ن$) حسابية إذا كان: $ح_{ن+1} - ح_ن$ = مقدار ثابت

لكل ن ∈ ص+ . يسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة الحسابية = ء

ملحوظة المتتابعة ($ح_ن$) تكون حسابية إذا وفقط إذا كان حدها العام $ح_ن$ دالة من الدرجة الأولى في ن . ويكون أساسها ء = معامل ن .

تدريب أى المتتابعات التالية حسابية ...

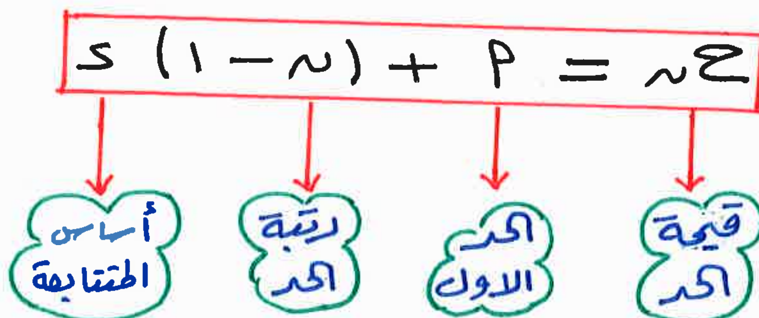
① $(ح_ن) = ن^٢ - ٥ن + ١$ ⟸ ليست متتابعة حسابية / دالة من الدرجة الثانية

② $(ح_ن) = \frac{١}{ن+٢}$ ⟸ ليست متتابعة حسابية / دالة كسرية

③ $(ح_ن) = ٣ × ٢^{ن+١}$ ⟸ ليست متتابعة حسابية / دالة أسية

④ $(ح_ن) = ٥ - \frac{١}{٢}ن$ ⟸ متتابعة حسابية / دالة كثيرة حدود درجة أولى

الحد العام (النوني) للمتتابعة الحسابية



* الصورة العامة للمتتابعة الحسابية :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، .... ، ل) حيث ل الحد الأخير

تدريب ٢ في المتتابعة الحسابية (١ ، ٥ ، ٩ ، ----) أوجد :-
① قيمة الحد العاشر ② رتبة الحد الذى قيمته تساوى ١٢١
③ رتبة أول حد قيمته أكبر من ٣٠٠

الحل

الشرح الحد الأول $أ = ١$

أساس المتتابعة $د = ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ٤$

① $ح_{١٠} = أ + ٩ د$
$= ١ + ٣٦$
$\therefore ح_{١٠} = ٣٧$

② $ح_ن = ١٢١$
$أ + (ن - ١) د = ١٢١$
$١ + (ن - ١) × ٤ = ١٢١$
$١ + ٤ن - ٤ = ١٢١$
$٤ن = ١٢٤$
$\therefore ن = ٣١$

③ $ح_ن > ٣٠٠$
$أ + (ن - ١) د > ٣٠٠$
$١ + (ن - ١) × ٤ > ٣٠٠$
$١ + ٤ن - ٤ > ٣٠٠$
$٤ن > ٣٠٣$
$ن > ٧٥{,}٧٥$
$\therefore ن = ٧٦$

ملاحظات
① لايجاد رتبة الحد الذى قيمته ل  $ح_ن = ل$
② لايجاد رتبة أول حد موجب  $ح_ن > ٠$
③ لايجاد رتبة أول حد سالب  $ح_ن < ٠$
④ لايجاد رتبة أول حد قيمته > ل  $ح_ن > ل$
⑤ لايجاد رتبة أول حد قيمته < ل  $ح_ن < ل$
⑥ لايجاد عدد حدود المتتابعة  $ح_ن = ل$

تدريب ٣ في المتتابعة الحسابية (٤٥ ، ٤١ ، ٣٧ ، ----) أوجد رتبة أول حد سالب

$ح_ن < ٠ \Leftarrow أ + (ن - ١) د < ٠$ | $أ = ٤٥$، $د = -٤$



تدريب ٤ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٥، ١٠، ١٥، ....، ٩٥٥)

الحل

ح ن = ل

∴ أ + (ن − ١) ء = ل

∴

أ = ٥
ء = ٥
ل = ٩٥٥

تدريب ٥ إثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٠٠ في المتتابعة الحسابية (١٣، ١٧، ٢١، ....)

الحل

نفرض ح ن = ١٠٠

∴ أ + (ن − ١) ء = ١٠٠

∴

أ = ١٣
ء = ٤
ح ن = ١٠٠

تدريب للطلبة

١) عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧، ١١، ١٥، .....، ٢٧١) هو

أ) ٣٤ ب) ٦٧ جـ) ١٦٩ ء) ٩٢١٢

٢) في المتتابعة الحسابية (١٢، ١٤، ١٦، ....) رتبة الحد الذى قيمته ١٠٢ يساوى

أ) ٤٦ ب) ٥١ جـ) ٩٢ ء) ٤٥

٣) المتتابعة الحسابية (٣، ٥، ٧، ....) حدها النوني يساوى

أ) ٣ن ب) ٢ن + ١ جـ) ٥ن − ٢ ء) ٢ن

٤) إذا كانت (٩، ٢٩، ك، ....، ٣٢ك، ٩٥٥) متتابعة حسابية فإن ك =

أ) ٢١ ب) ٣١ جـ) ٩٥ ء) ١٢٤

تعيين المتتابعة الحسابية

تدريب ١
أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الثالث = ٨ وحدها السادس = ١٧

الحل

الشرح

ح٣ = ٨ ، ح٦ = ١٧

∴ أ + ٢ء = ٨ ⟵ I

أ + ٥ء = ١٧ ⟵ II

بحل المعادلتين I ، II ⟸ أ = ٢ ، ء = ٣

∴ المتتابعة هي (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....) #

تدريب ٢
(حن) متتابعة حسابية فيها ح١ + ح٢ = ٩ ، ح٥ = ٣٢ أوجد المتتابعة

الحل

تدريب ٣
متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ومجموع حديها الخامس والتاسع ٤٠
أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٥٢ في المتتابعة .

الحل

الشرح

ح٤ = ١١

أ + ٣ء = ١١ ⟵ I

ح٥ + ح٩ = ٤٠

أ + ٤ء + أ + ٨ء = ٤٠

٢أ + ١٢ء = ٤٠ ⟵ II

بحل المعادلتين I ، II

∴ أ = ٢ ، ء = ٣

∴ المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....)

حن = ١٥٢

٢ + (ن − ١) × ٣ = ١٥٢ ∴ ن = ٥١

تدريب ٤

أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر يساوي ثلاثة أمثال حدها الثالث .

الحل

الشرح

$ح_٥ = ٢١$

$أ + ٤ء = ٢١$ ——— I

$ح_{١٠} = ٣ ح_٣$ ،

$أ + ٩ء = ٣ (أ + ء)$

$٢أ - ٦ء = ٠$ ——— II

بحل المعادلتين I ، II $\Leftarrow$ $أ = ٩$ ، $ء = ٣$

∴ المتتابعة هي (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ----)

تدريب ٥

أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

الحل

تدريب ٦

متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ح_ن = ٣٩$ ، $ح_{٢ن} = ٧٩$

فما قيمة ن ؟ ثم أوجد المتتابعة .

الحل

الوسط الحسابي

* إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاثه حدود فى تتابع حسابي فإن ب يسمى وسط حسابي بين أ ، جـ ويكون: $ب = \frac{أ+جـ}{2}$ أي $2ب = أ + جـ$

تدريب ١ إذا كانت (ك+٣ ، ٢ك+٥ ، ٤ك ، ...) متتابعة حسابية أوجد قيمة ك

الحل

الشرح

∵ $ح_2$ وسط حسابي بين $ح_1$ ، $ح_3$

∴ $2ح_2 = ح_1 + ح_3$

∴ $2(2ك+5) = ك+3+4ك$

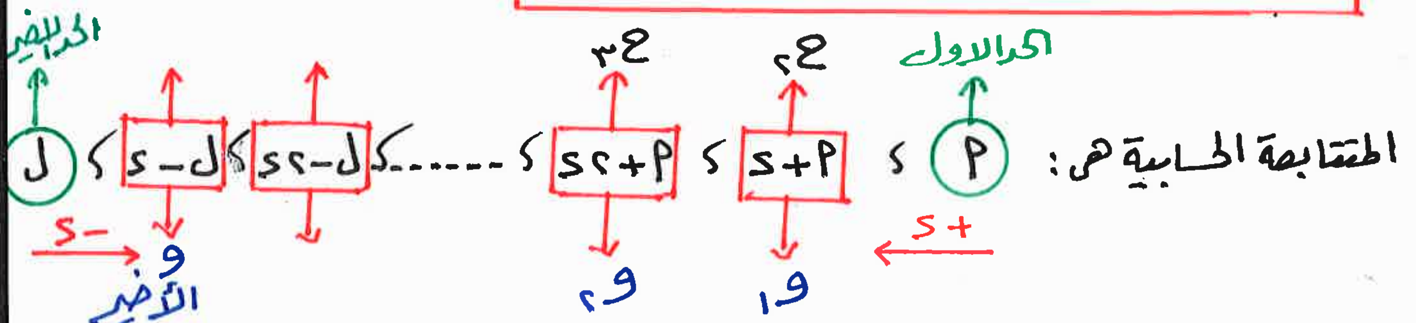
∴ $4ك+10 = 5ك+3 \Leftarrow ك = 7$

تدريب ٢ إذا كان الوسط الحسابي بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابي بين ٤أ ، ب هو ٢٠ . فأوجد قيمة : أ ، ب

الحل

---

* إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل



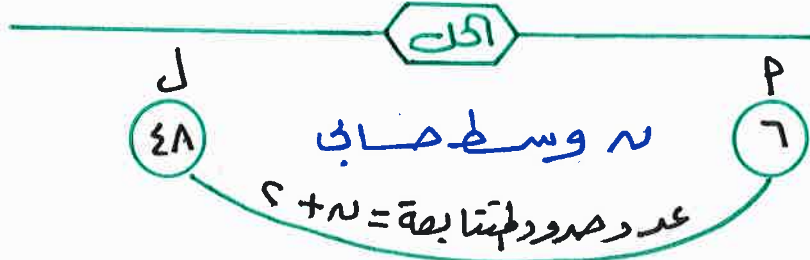
لاحظ الفرق ما بين الحد والوسط في المتتابعة الحسابية

ح٤ = أ + ٣ء   و٤ = أ + ٤ء

تدريب ٣ أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦ ، ٤٨

الحل

الشرح



حن = ل

أ + (ن − ١)ء = ل

٦ + ٦ء = ٤٨

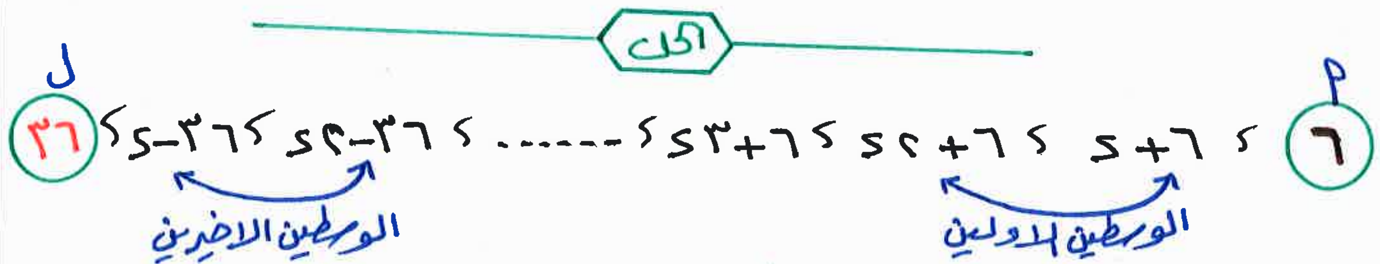
∴ ء = ٧

∴ الأوساط هي

(١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١)

تدريب ٤ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٦ ، ٣٦ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين النسبة ١ : ٣ فما عدد الأوساط

الحل



(٦ + ء + ٦ + ٢ء) ÷ (٣٦ − ء + ٣٦ − ٢ء) = ١ ÷ ٣

(١٢ + ٣ء) ÷ (٧٢ − ٣ء) = ١ ÷ ٣

٣(٤ + ء) ÷ ٣(٢٤ − ء) = ١ ÷ ٣

∴ ء = ٣

نفرض عدد الأوساط = ن

عدد الحدود = ن + ٢

حن+٢ = ل

∴ ٦ + (ن + ١) × ٣ = ٣٦

∴ ن = ٩

∴ عدد الأوساط = ٩

تدريب للطلبة

(١) في أي متتابعة حسابية الوسط الخامس هو الحد

(أ) الخامس (ب) الرابع (جـ) العاشر (د) السادس

(٢) إذا كان الوسط الحسابي للعددين س ، ٢٦ هو ٢١ فإن س =

(أ) ٢٦ (ب) ١٦ (جـ) ٤٢ (د) ٢١

(٣) عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط الأخير =

(أ) ل - د (ب) ل (جـ) ل - ٢د (د) ل + د

(٤) إذا كان أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن $\frac{ص - س}{ب - أ}$ = ..

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

---

(٥) بدأ كريم في قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة في منحدر فقطع في الثانية الاولى ١٠٠ سم وفي كل ثانية تاليه بعد ذلك كان يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم أوجد المسافة التي يقطعها في الثانية العاشرة . (١١٨٠ سم)

---

(٦) إشترى رجل دراجة بخارية واتفق مع البائع أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النوني هو ١٢٠ ن + ٨ فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه أوجد عدد هذه الأقساط . (١١)

مجموع المتتابعة الحسابية

$$ح_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)ء]$$

$$ح_ن = \frac{ن}{٢}[أ + ل]$$

ملاحظات

١) لايجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع موجباً ← $ح_ن > ٠$

٢) لايجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع سالباً ← $ح_ن < ٠$

٣) لايجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع أكبر ما يمكن ← عدد الحدود الموجبة

٤) لايجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع أصغر ما يمكن ← عدد الحدود السالبة

تدريب ١
أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (٥، ٨، ١١، ...)

الحل

أ = ٥ ، ء = ٣ ، ن = ١٠

$∵ ح_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)ء]$

$ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢×٥ + ٩×٣] = ١٨٥$

تدريب ٢
أوجد مجموع المتتابعة الحسابية (٤، ٩، ١٤، ...، ٧٤)

الحل

الشرح
(i) يجب معرفة عدد حدود المتتابعة
(ii) نوجد بعد ذلك المجموع من بيانات المسألة

(i)
$ع_ن = ل$
$أ + (ن-١)ء = ل$
$٤ + (ن-١)×٥ = ٧٤$
$٤ + ٥ن - ٥ = ٧٤$
$٥ن - ١ = ٧٤$
$∴ ن = ١٥$

(ii)
$ح_ن = \frac{ن}{٢}[أ + ل]$
$ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢}[٤ + ٧٤]$
$∴ ح_{١٥} = ٥٨٥$

تدريب ٣

أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١، ٣، ٥، ...) إبتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود يساوي ٤٠٠

الحل

الشرح (i) أ = ١ ، ء = ٢

(ii) جـن = ٤٠٠ والمطلوب ن

∵ جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء]

٤٠٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ + (ن − ١) × ٢]

٤٠٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ + ٢ن − ٢]

٤٠٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ن] ⟸ ٤٠٠ = ن^{٢} ⟸ ن = ٢٠ حداً

تدريب ٤

متتابعة حسابية حدها الأول = ٩ وحدها الأخير = ٦٥ ومجموع حدودها يساوي ٥٥٥ أوجد المتتابعة .

الحل

الشرح (i) نوجد أولاً عدد حدود المتتابعة

(ii) نوجد أساس المتتابعة ء

∵ جـن = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل]

٥٥٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٩ + ٦٥]

∴ ن = ١٥ حداً

ح ن = ل

٩ + ١٤ء = ٦٥

١٤ء = ٥٦ ⟸ ء = ٤

∴ المتتابعة (٩، ١٣، ...، ٦٥)

تدريب ٥

إذا كان مجموع ن حداً من متتابعة حسابية يعطى بالعلاقة جـن = ٢ن (ن + ٣) أوجد المتتابعة وقيمة الحد العشرون

تدريب ٦

أوجد أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) إبتداء من الحد الأول ليكون المجموع موجباً .

الحل

الشرح

(i) أ = ٢٥   د = -٤

(ii) لإيجاد عدد الحدود نضع $ح_ن > ٠$ (موجباً)

∴ $ح_ن > ٠$

∴ $\frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د] > ٠$ ÷ $\frac{ن}{٢}$ [قبل التعويض]

∴ $٢ \times ٢٥ + (ن-١) \times -٤ > ٠$

$٥٠ - ٤ن + ٤ > ٠ \Leftarrow ٥٤ > ٤ن$

∴ $ن < ١٣,٥ \Leftarrow$ **ن = ١٣**

تدريب ٧

مسرح به ٢٥ صفاً من الكراسي ، يحتوي الصف الأول على ٢٠ كرسياً ، ويحتوي الصف الثاني على ٢٢ كرسياً ويحتوي الصف الثالث على ٢٤ كرسياً وهكذا ، أوجد عدد الكراسي في جميع صفوف المسرح .

الحل

الشرح

صف أول	صف ثاني	صف ثالث	صف رابع	...	صف ٢٥
٢٠	٢٢	٢٤	٢٦		

واضح أن عدد الكراسي على شكل متتابعة حسابية

أ = ٢٠ ، د = ٢ ، ن = ٢٥

$ح_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢}[٢ \times ٢٠ + ٢٤ \times ٢] = ١١٠٠$ كرسي

تدريب ٨

يدخر كريم من عمله اليومي ١٥ جنيهاً فإذا كان يدخر في كل يوم مبلغاً يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يوماً

الحل

الشرح

اليوم ١	اليوم ٢	اليوم ٣	...	اليوم ١٥
١٥	١٧	١٩		

أ = ١٥ ، د = ٢ ، ن = ١٥

تدريب ٩

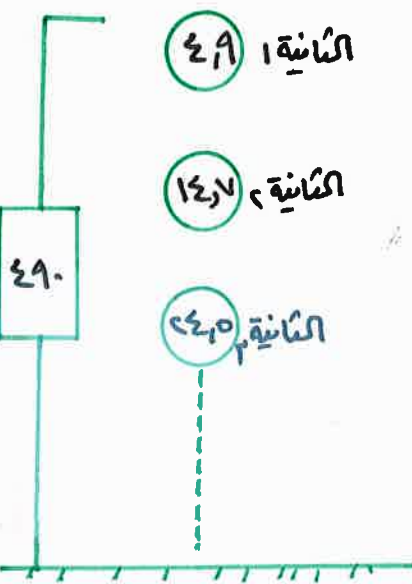
سقط جسم من إرتفاع ٤٩٠ متراً تحت تأثير الجاذبية الأرضية وبفرض اهمال المقاومة فإنه يقطع مسافة ٤,٩ أمتار فى الثانية الاولى ، ١٤,٧ متر فى الثانية الثانية ، ٢٤,٥ متر فى الثانية الثالثة وهكذا ، أوجد :

(١) المسافة التى يقطعها الجسم فى الثانية السادسة

(٢) مجموع المسافات المقطوعة فى الثوانى الثمانى الأولى

(٣) متى يصل الجسم إلى سطح الأرض

الحل



الشرح

المسافات المقطوعة تكون متتابعة حسابية $أ = ٤,٩$ ، $ء = ٩,٨$

(١) $ح_٦ = أ + ٥ء$

$= ٤,٩ + ٥ \times ٩,٨ = ٥٣,٩$ متر

(٢) $جـ_٨ = \frac{٨}{٢} [٢ \times ٤,٩ + ٧ \times ٩,٨] = ٣١٣,٦$ متر

(٣) $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١)ء]$

$٤٩٠ = \frac{ن}{٢} [٢ \times ٤,٩ + (ن - ١) \times ٩,٨]$

$٤٩٠ = \frac{ن}{٢} [٩,٨ + ٩,٨ن - ٩,٨] \Leftarrow ن = ١٠$ ثوانى

تدريب ١٠

يمتلك كريم محلاً تجارياً للسلع الغذائية ويقوم بترتيب علب التونة فى صفوف بحيث يضع فى الصف السفلى ٢١ علبة والصف الذى يليه ١١ علبة والصف الذى يليه ١٠ علب وهكذا.

(١) أوجد عدد علب التونة فى الصف السابع [٦]

(٢) فى أى صف تكون علب التونة ٣ علب ؟ [١٠]

(٣) أوجد عدد علب التونة بدءاً من الصف الأول وحتى الصف الأخير الذى يحتوى على علبة واحدة [٧٨]

المتتابعة الهندسية

تعريف

تسمى المتتابعة ($ح_ن$) متتابعة هندسية إذا كان: $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن}$ = مقدار ثابت

لكل ن ∈ ص$^+$ ، $ح_ن \neq$ صفر

يسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة الهندسية (ر)

الحد العام للمتتابعة الهندسية

$$ح_ن = أ \times ر^{ن-1}$$

* المتتابعة الهندسية حدودها هي (أ ، أر ، أر^2 ، ... ، $\frac{ل}{ر^2}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)

تدريب 1

في المتتابعة الهندسية (5 ، 10 ، 20 ، 40 ، ....) أوجد :

(1) قيمة الحد السابع (2) رتبة الحد الذي قيمته 2560

الحل

الشرح (i) أ = 5 (ii) $ر = \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{10}{5} = 2$

(1) $ح_7 = أ ر^6 = 5 \times 2^6 = 320$

(2) $ح_ن = 2560$

$أ \times ر^{ن-1} = 2560$

$5 \times 2^{ن-1} = 2560 \Leftarrow 2^{ن-1} = 512 = 2^9 \Leftarrow ن - 1 = 9 \Leftarrow$ **ن = 10**

تدريب 2

في المتتابعة الهندسية ($\frac{1}{128}$ ، $\frac{1}{64}$ ، $\frac{1}{32}$ ، ....) أوجد رتبة الحد الذي قيمته 64

الحل

الشرح (i) $أ = \frac{1}{128}$ $ر = \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{1}{64} \div \frac{1}{128} = 2$

$\therefore \frac{1}{128} \times 2^{ن-1} = 64 \Leftarrow 2^{ن-1} = 64 \times 128 \Leftarrow 2^{ن-1} = 2^{13} \Leftarrow$ **ن = 14**

تدريب ٢

① جميع المتتابعات التالية هندسية ماعدا المتتابعة ..

(أ) (٣، −٦، ١٢، −٢٤، ....)
(ب) (لو أ، لو أ^٢، لو أ^٣، لو أ^٤، ....)
(ج) ($\frac{٣}{٢}$، ١، $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٤}{٩}$، ....)
(د) ($\frac{٣ب}{٢أ}$، ٣، $\frac{٦أ}{ب}$، $\frac{١٢أ^٢}{ب^٢}$، ....)

② المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هي ---

(أ) (ح_ن) = (٤ ن^٣) لكل ن ≥ ١
(ب) (ح_ن) = ($\frac{١}{٤}$ × ح_{ن−١}) لكل ن ≥ ٢
(ج) (ح_ن) = (٢^ن − ١) لكل ن ≥ ١
(د) (ح_ن) = (لو (٣ × ٢^ن)) لكل ن ≥ ١

③ إذا كانت : س ≠ ٢ ، فإن أساس المتتابعة الهندسية (٤، س−٣، س+٦، ....) هو

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٣ (د) ٢٤

تدريب ٣

أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الرابع = ٨ وحدها السابع = ٦٤

الحل

الشرح لإيجاد المتتابعة الهندسية نوجد (أ) ، (ر) عن طريق حل معادلتين بالقسمة

∴ أ ر^٣ = ٨ ⟵ I أ ر^٦ = ٦٤ ⟵ II

II ÷ I ⟸ $\frac{أ ر^٦}{أ ر^٣} = \frac{٦٤}{٨}$ ⟸ ر^٣ = ٨ ⟸ ر = ٢

بالتعويض في I ⟸ ٨ أ = ٨ ⟸ أ = ١ ∴ المتتابعة (١، ٢، ٤، ....)

تدريب ٤

إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متتابعة هندسية = ٩ ومجموع الحدين السادس والسابع = ٢٨٨ أوجد المتتابعة

الحل

∵ ح_١ + ح_٢ = ٩ ∵ ح_٦ + ح_٧ = ٢٨٨
∴ أ + أ ر = ٩ ∴ أ ر^٥ + أ ر^٦ = ٢٨٨
∴ أ (١ + ر) = ٩ ⟵ I ∴ أ ر^٥ (١ + ر) = ٢٨٨ ⟵ II

II ÷ I ⇐ $ر^٥ = ٣٢$ ⇐ **ر = ٢**

بالتعويض في I ⇐ **أ = ٣** ∴ المتتابعة هي (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ------)

تدريب ٥ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_٥ = ٩$ ، $ح_٩ = \frac{١}{٩}$ أوجد المتتابعة

الحل

تدريب ٦ يصب الماء في خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة . فإذا صب في اليوم الأول ١٢ لتراً فبعد كم يوم يصب فيه ١٥٣٦ لتراً ؟

الحل

الشرح



١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ١٥٣٦

واضح أن الماء يكون متتابعة هندسية فيها أ = ١٢

ر = ٢

ل = ١٥٣٦

$ح_ن = ل$

$أ × ر^{ن-١} = ل$

∴ $١٢ × (٢)^{ن-١} = ١٥٣٦$ ÷ ١٢

∴ $(٢)^{ن-١} = ١٢٨ = ٢^٧$ ⇐ **ن = ٨** ∴ بعد ٨ أيام يصب ١٥٣٦ لتراً

تدريب ٧ إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية في إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤٪ سنوياً وكان عدد الطلاب حالياً ٢٤٠٠ طالب فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات ؟

الحل

الشرح (i) عدد الطلاب حالياً ٢٤٠٠

(ii) بعد سنة = ٢٤٠٠ + ٢٤٠٠ × ٠,٠٤ = ٢٤٠٠ × (١,٠٤)

(iii) بعد سنتين = ٢٤٠٠ × (١,٠٤) + ٠,٠٤ × (١,٠٤) × ٢٤٠٠ = ٢٤٠٠ × (١,٠٤)^٢

واضح أن الزيادة تكون متتابعة هندسية أ = ٢٤٠٠ × ١,٠٤

ر = ١,٠٤

ح٦ = أ ر^٥ = ٢٤٠٠ × ١,٠٤ × (١,٠٤)^٥ =

∴ ح٦ = ٢٤٠٠ × (١,٠٤)^٦ = ٣٠٣٧ طالب

ملحوظة

عند تكوين متتابعة هندسية وفيها نسبة مئوية أ ٪

(i) إذا كان فيها زيادة ر = (١ + أ٪)

إذا كان فيها نقص ر = (١ − أ٪)

تدريب للطلبة

(١) إذا كانت (١ ، ك ، ٤ك − ٤) متتابعة هندسية فإن ك =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) في المتتابعة الهندسية $(\frac{١}{٨} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢} ، ...)$ حدها العاشر =

(أ) ٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ٢٨

(٣) موظف راتبه الشهري ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ١٠ ٪ زيادة عن راتبه في السنة السابقة مباشرة. فكم يكون راتبه بعد مرور ٤ سنوات.

[١٧٥٦,٩]

الوسط الهندسى

تعريف

إذا كان ٢ ، ب ، حـ متتابعة هندسية فإن ب وسط هندسى بين ٢ ، حـ

$$ب = \pm \sqrt{٢ حـ} \quad \text{أى} \quad ب^٢ = ٢ حـ$$

ملاحظات

(١) الوسط الهندسى لأى كميتين يجب أن يكون لهما نفس الإشارة [موجبين معاً أو سالبتين معاً]

(٢) يمكن إيجاد الوسط الهندسى لعدة كميات موجبة عددها "ن"

$$\text{الوسط الهندسى الموجب} = \sqrt[ن]{٢ \times ب \times حـ \times \cdots}$$

تدريب ١

عددان موجبان وسطهما الحسابى = ١٠ ووسطهما الهندسى يساوى ٦ أوجد العددين.

الحل

نفرض العددان س ، ص

الوسط الحسابى = ١٠

∴ س + ص = ٢٠

∴ ص = ٢٠ − س ⟵ I

الوسط الهندسى = ٦

∴ س ص = ٣٦ ⟵ II

بالتعويض من I فى II ⟸ س (٢٠ − س) = ٣٦

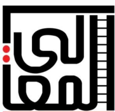
⟸ ٢٠ س − س^٢ = ٣٦

⟸ س^٢ − ٢٠ س + ٣٦ = ٠

∴ س = ٢ ∴ ص = ١٨

س = ١٨ ∴ ص = ٢

∴ العددان ٢ ، ١٨



ملحوظة

(١) لأى عددين حقيقيين موجبين ومختلفين الوسط الحسابي > الوسط الهندسى

(٢) لأى عددين حقيقيين موجبين متساويين الوسط الحسابي = الوسط الهندسى

تدريب ٢

إذا كانت س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة فى تتابع هندسى

إثبت أن : س + ل > ص + ع

الحل

∵ س ، ص ، ع فى تتابع هندسى

∴ ص وسط هندسى بين س ، ع

∵ الوسط الحسابي > الوسط الهندسى

∴ $\frac{س + ع}{٢} >$ ص ×٢

∴ س + ع > ٢ص ⟵ I

∵ ص ، ع ، ل فى تتابع هندسى

∴ ع وسط هندسى بين ص ، ل

∴ الوسط الحسابي > الوسط الهندسى

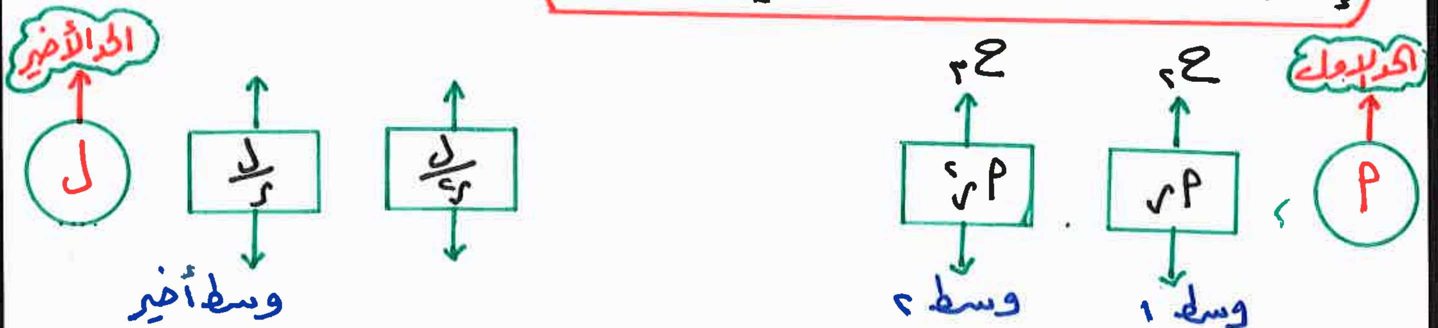
∴ $\frac{ص + ل}{٢} >$ ع ×٢

∴ ص + ل > ٢ع ⟵ II

بجمع I ، II ⟸ س + ع + ص + ل > ٢ص + ٢ع بحذف ص ، ع من الطرفين

∴ س + ل > ص + ع #

إدخال ن وسط هندسى بين أ ، ل



تدريب ٣

أدخل ٧ أوساط هندسية موجبة بين ٣ ، ٧٦٨

الحل

(٣) عدد الأوساط = ٧ ، (٧٦٨)

أ = ٣

ل = ٧٦٨

ن = ٧ + ٢ = ٩ حدود

∴ $ح_ن = ل$

∴ $أ \times ر^{ن-١} = ل$

∴ $٣ \times ر^{٨} = ٧٦٨ \div ٣$

∴ $ر^{٨} = ٢٥٦ \Leftarrow ر = \pm ٢$ ∵ الأوساط موجبة ∴ **$ر = ٢$**

∴ الأوساط هي : ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ----- ، ٣٨٤

تدريب ٤

إذا كانت ٤ ، ب ، ص في تتابع حسابي وكانت ٢ ، ب + ٣ ، ٥ص في تتابع هندسي أوجد قيمة ب ، ص

الحل

∵ ٤ ، ب ، ص في تتابع حسابي

∴ ب وسط حسابي بين ٤ ، ص

∴ $٢ب = ٤ + ص$

∴ $ص = ٢ب - ٤$ ⟵ I

∵ ٢ ، ب + ٣ ، ٥ص في تتابع هندسي

∴ (ب + ٣) وسط هندسي بين ٢ ، ٥ص

∴ $(ب + ٣)^{٢} = ١٠ص$ ⟵ II

بالتعويض من I في II ⟸ ∴ $ب^{٢} + ٦ب + ٩ = ٢٠ب - ٤٠$

⟸ $ب^{٢} - ١٤ب + ٤٩ = ٠$

⟸ $(ب - ٧)^{٢} = ٠$ ⟸ **$ب = ٧$** ، **$ص = ١٠$**

تدريب ٥

(١) إذا كانت (س ، ص ، ع ، ...) في تتابع هندسي فإن :

(أ) $٢ص > س + ع$ (ب) $ص^{٢} < س ع$ (ج) $ص = س ع$ (د) $|ص| = \sqrt{س ع}$

(٢) إذا كانت (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فإن س + ص = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٤ (ج) ٣٤ (د) ٤٢

(٣) إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ وكان حاصل ضرب الوسطين الثاني والأخير يساوي ٢٣٠٤ فإن عدد تلك الأوساط =

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٠ (د) ١٢

مجموع المتتابعة الهندسية

$$ح_ن = \frac{أ(ر^ن - 1)}{ر - 1}$$

$$ح_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - 1} \quad \text{حيث } ر \neq 1$$

تدريب ١

كم حداً تؤخذ من المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ....) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ٩٨٤١

الحل

أ = ١

ر = ٣

ح ن = ٩٨٤١

ن = ؟؟؟

$$٩٨٤١ = \frac{١(٣^ن - ١)}{٣ - ١}$$

$$٣^ن - ١ = ١٩٦٨٢$$

$$٣^ن = ١٩٦٨٣ = ٣^٩ \Leftarrow \boxed{ن = ٩}$$

تدريب ٢

متتابعة هندسية حدها الأول = ٢ وحدها الأخير = ٢٥٦ ومجموع حدودها ٥١٠ أوجد المتتابعة.

الحل

أ = ٢

ل = ٢٥٦

ح ن = ٥١٠

ر = ؟؟؟

$$ح_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - 1}$$

$$٥١٠ = \frac{٢٥٦ ر - ٢}{ر - ١} \Leftarrow ٥١٠ ر - ٥١٠ = ٢٥٦ ر - ٢$$

$$\therefore ٢٥٤ ر = ٥٠٨ \Leftarrow \boxed{ر = ٢}$$

∴ المتتابعة هي (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....)

تدريب ٣

خزان به ٦١٣٨ لتراً من الماء يتسرب منه في أول يوم ٦ لترات وفي اليوم الثاني ١٢ لتراً وفي اليوم الثالث ٢٤ لتراً وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً

الحل

ح ن: ٦١٣٨ — اليوم ١: ٦ — اليوم ٢: ١٢ — اليوم ٣: ٢٤

مقدار التسرب يومياً يكون متتابعة هندسية أ = ٦ ، ر = ٢

$ح_ن = ٦١٣٨$ ⇐ ∴ $\frac{٦(ر^ن - ١)}{ر - ١} = ٦١٣٨$ ÷ ٦

⇐ $ر^ن - ١ = ١٠٢٣$

⇐ $ر^ن = ١٠٢٤ = ر^{١٠}$ ⇐ $ن = ١٠$

∴ الخزان يصبح فارغاً بعد ١٠ أيام

تدريب ٤

إذا تضاعفت زراعة البكتريا كل يوم (في أحد الأوساط الغذائية) فكم يكون عدد البكتريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها في اليوم الاول ٨٠٠

الحل

٨٠٠ | ١٦٠٠ | ٣٢٠٠ | .... | ؟؟؟

$أ = ٨٠٠$
$ر = ٢$
$ن = ١٠$
$ح_ن = ؟؟؟$

$ح_{١٠} = \frac{٨٠٠(ر^{١٠} - ١)}{ر - ١} = ٨١٨٤٠٠$

مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

$ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$ حيث $|ر| < ١$ أي $-١ < ر < ١$

تدريب ٥

١) مجموع عدد غير منتهٍ من حدود المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) هو

أ) ١٢٠   ب) ١٢٢   ج) ١٢٤   د) ١٢٨

٢) إذا كان مجموع عدد غير منتهٍ من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو $١٣\frac{١}{٢}$ فإن حدها الاول يساوي

أ) ٦   ب) ٨   ج) ٩   د) ١٢

تدريب ٦

متتابعة هندسية فيها ح٢ = ٥ ، ح٤ = ٢٧ ح٧ أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن جمع عدد غير منتهٍ من حدودها ثم أوجد هذا المجموع

الحل

ح٢ = ٥

∴ أ ر = ٥ ⟵ I

ح٤ = ٢٧ ح٧

أ ر٣ = ٢٧ أ ر٦ ÷ أ ر٣

١ = ٢٧ ر٣ ⟸ ر٣ = $\frac{١}{٢٧}$ ⟸ ر = $\frac{١}{٣}$

∴ $\frac{١}{٣}$ أ = ٥

∴ أ = ١٥

∵ ر = $\frac{١}{٣}$ < ١ ∴ يمكن جمع المتتابعة الهندسية إلى ∞

∴ حـ∞ = $\frac{١٥}{١ - \frac{١}{٣}}$ = ٢٢٫٥

الكسر العشري الدائري

$\frac{١}{٣}$ = ٠٫٣٣٣٣... و يكتب للاختصار ٠٫$\overline{٣}$ و يسمى كسر عشري دائري

تدريب ٧

ضع العدد ٠٫$\overline{٧}$ على صورة كسر إعتيادي

الحل

أي كسر عشري دائري يكون على شكل متتابعة هندسية غير منتهية

٠٫$\overline{٧}$ = ٠٫٧٧٧ ...

٠٫$\overline{٧}$ = ٠٫٧ + ٠٫٠٧ + ٠٫٠٠٧ + ...

حـ∞ = $\frac{أ}{١ - ر}$ = $\frac{٠٫٧}{١ - ٠٫١}$ = $\frac{٧}{٩}$

∴ ٠٫$\overline{٧}$ = $\frac{٧}{٩}$

مبدأ العد

تعريف

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما $= م_1$

، عدد طرق إجراء عمل ثان $= م_2$

، عدد طرق إجراء عمل ثالث $= م_3$ .... وهكذا

فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معاً $= م_1 \times م_2 \times م_3 \times ... \times م_ن$

تدريب 1 شخص لديه ٥ قمصان ، ٣ بنطلونات . بكم طريقة يمكنه أن يرتدي زي مكون من بنطلون وقميص

الحل

عدد طرق إختيار قميص = ٥   عدد طرق إختيار بنطلون = ٣

∴ عدد طرق إختيار الزي معاً = ٥ × ٣ = ١٥ طريقة

تدريب 2 بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من {١ ، ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٣ ، ٠}

الحل

الشرح لاحظ هنا إن مبدأ العد مشروط :-

(i) العدد أرقامه مختلفة يعني مينفعش ٣٣٢ وهكذا

(ii) رقم المئات مينفعش صفر

∴ عدد طرق إختيار الرقم في خانة المئات = ٣ (لما استبعدنا صفر)

عدد طرق إختيار الرقم في خانة العشرات = ٣ (برضو استبعدنا رقم المئات)

عدد طرق إختيار الرقم في خانة الأحاد = ٢

مئات	عشرات	أحاد
٣	٣	٢

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب ن $\underline{ن}|$ يساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه أو تساوى ن

$$\underline{ن}| = ن(ن-١)(ن-٢) \times --- \times ٣ \times ٢ \times ١$$

ملاحظات

١) $ن \in ص^+$

٢) $\underline{٠}| = \underline{١}| = ١$

٣) $\underline{ن}| = ن\,\underline{ن-١}| = ن(ن-١)\,\underline{ن-٢}| = ----$ وهكذا

٤) يمكن إستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب عدد $\boxed{x!}$

تدريب ١

١) $\underline{٣}| =$

٢) $\underline{٤}| =$

٣) $\underline{٥}| =$

٤) $\dfrac{\underline{١٠٠}|}{\underline{٩٨}|} =$

تدريب ٢ أوجد قيمة ن إذا كان :-

١) $\underline{ن}| = ٢٤$ ٢) $\underline{ن-١}| = ١٢٠$

الحل

١	٢
$\because \underline{ن}| = ٢٤$	$\underline{ن-١}| = ١٢٠$
$\therefore \underline{ن}| = \underline{٤}|$	$\underline{ن-١}| = \underline{٥}|$
$\therefore ن = ٤$	$ن-١ = ٥$
	$\therefore ن = ٦$

تدريب ٣ أوجد مجموعة حل المعادلة :-

(١) لـن = ٣٠ لـن−٢ (٢) لـن−١ = ١

الحل

(١)
لـن = ٣٠ لـن−٢
ن (ن − ١) لـن−٢ = ٣٠ لـن−٢
ن (ن − ١) = ٣٠
ن² − ن − ٣٠ = ٠
ن = ٦   ن = −٥ مرفوض
∴ م.ح = {٦}

(٢)
∵ لـن−١ = ١
∴ لـن−١ = لـ٠   ، لـن−١ = لـ١
∴ ن − ١ = ٠   ن − ١ = ١
ن = ١   ن = ٢
∴ م.ح = {١ ، ٢}

تدريب ٤ بكم طريقة يستطيع ٤ طلاب الجلوس :

(١) في صف واحد (٢) حول نضد دائري

الحل

(١)
عدد طرق إختيار الطالب الاول = ٤
عدد طرق إختيار الطالب الثاني = ٣
عدد طرق إختيار الطالب الثالث = ٢
عدد طرق إختيار الطالب الرابع = ١
∴ عدد طرق الاختيار = ٤ × ٣ × ٢ × ١
= ٢٤ طريقة

(٢)
الطالب الاول ليس له إختيار حتى يكون البداية
عدد طرق إختيار الطالب الثاني = ٣
عدد طرق إختيار الطالب الثالث = ٢
عدد طرق إختيار الطالب الرابع = ١
∴ عدد طرق الاختيار = ٣ × ٢ × ١
= ٦ طرق

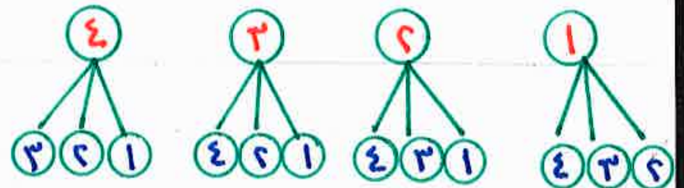
ملحوظة عدد طرق ترتيب ن من الأشياء في شكل :-

(١) صف واحد = لـن (٢) دائرة = لـن−١

تمهيد من الأرقام التالية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ بكم طريقة يمكن تكوين :-

(١) عدد من رقمين مختلفين (٢) مجموعة من عنصرين

الحل



٢١ ٣١ ٤١ ١٢ ٣٢ ٤٢

١٣ ٢٣ ٤٣ ١٤ ٢٤ ٣٤

عدد الطرق = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة

لاحظ

* العدد يحتاج ترتيب آحاد ثم عشرات
* الاعداد تمثل كل التبديلات الممكنة للارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤
* عدد الاعداد (التبديلات) تسمى تباديل
* عدد الطرق = $^{4}ل_{2}$ = ١٢ طريقة

{١ ، ٢} {١ ، ٣} {١ ، ٤}

{٢ ، ٣} {٢ ، ٤} {٣ ، ٤}

عدد الطرق = ٦

لاحظ

* المجموعة لا تحتاج ترتيب
* المجموعة لا يتكرر العنصر فيها
* عدد المجموعات السابقة تسمى توافيق

∴ عدد الطرق = $^{4}ق_{2}$ = ٦ طرق

التباديل

* $^{ن}ل_{ر}$ هى عدد طرق ترتيب (ن) من العناصر المختلفة فى (ر) من الأماكن

(ن) يسمى العلم ، (ر) يسمى دليل

الشروط

(i) $^{ن}ل_{ر}$ = عدد صحيح موجب $^{ن}ل_{ر} \in ص^{+}$

(ii) ن عدد صحيح موجب $ن \in ص^{+}$

(iii) ٠ ≤ ر ≤ ن ٠ ≤ دليل ≤ العلم

قوانين التباديل

① $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-1)(ن-2) \cdots (ن-ر+1)$

فك التباديل إلى عوامل متتالية أكبر عامل $ن$

② $^{ن}ل_{ر} = \frac{|ن}{|ن-ر}$

$علم ل دليل = \frac{|علم}{|علم - دليل}$

③ $^{ن}ل_{0} = 1$ ④ $^{ن}ل_{1} = ن$ ⑤ $^{ن}ل_{ن} = |ن$

ملحوظة يمكن ايجاد التباديل باستخدام الآلة الحاسبة nPr

تدريب ٥

① $^{8}ل_{3} =$

② $^{10}ل_{2} =$

③ $^{7}ل_{4} =$

تدريب ٦

إذا كان $^{7}ل_{ر} = 840$ أوجد قيمة $|7-ر$

الحل

$\because ^{7}ل_{ر} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = ^{7}ل_{4}$

$\therefore ر = 4$

$\therefore |7-ر = |3 = 6$ ... $= 1$

باستخدام الحاسبة يمكن الحل

$^{7}ل_{ر} = ^{7}ل \ldots$

$\therefore ر = \ldots\ldots$

تدريب ٧ أوجد قيمة $ن$:

① $^{ن}ل_{5} = 2520$ ② $|ن = 5040$

الحل

$^{ن}ل_{5} = ^{7}ل_{5}$

$\therefore ن = 7$

$|ن = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$|ن = |7 \quad \therefore ن = 7$

تدريب ٨

أوجد قيمة ن

(١) $^{ن}ل_{٠} + ^{ن}ل_{١} + ^{ن}ل_{٢} = ٥٠$

(٢) $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times ^{ن-٢}ل_{٣}$

الحل

(١)

$١ + ن + ن(ن-١) = ٥٠$

$ن + ن^{٢} - ن = ٤٩$

$ن^{٢} = ٤٩$

$\therefore ن = ٧$ ، $ن = -٧$ مرفوض

(٢)

$ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) = ١٤ \times (ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)$

$ن^{٢} - ن = ١٤ن - ٥٦$

$ن^{٢} - ١٥ن + ٥٦ = ٠$

$ن = ٧$ ، $ن = ٨$

تدريب ٩

(١) $^{ن}ل_{٢}$ يمكن أن تساوي

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (ج) ١٧ (د) ٢٠

(٢) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التي يمكن تكوينها من عناصر {١ ، ٢ ، ٣} حيث أ ≠ ب هو

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٩

(٣) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد في صف يساوي

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (ج) ٤ × ٤ (د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(٤) إذا كان : $\frac{^{ن}ل_{٣}}{٣!} = ١٢٠$ فإن قيمة $^{ن}ل_{٣} =$

(أ) ٧٢٠ (ب) ٢٧٠ (ج) ١٢٠ (د) ٢٤٠

(٥) إذا كان : $^{ن}ل_{٢ن-١} = ١٢$ فإن ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٦) لجنة مؤلفة من ١٢ عضواً . بكم طريقة يمكن إختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة ؟

(أ) ٢ (ب) ٢٣ (ج) ٦٦ (د) ١٣٢

التوافيق

$^{ن}ق_{ر}$ = عدد المجموعات الجزئية المحتوية على (ر) من العناصر التى يمكن تكوينها من مجموعة بها (ن) من العناصر

الشروط

(i) $^{ن}ق_{ر}$ = عدد صحيح موجب

(ii) $ن ، ر \in ص^{+}$

(iii) $0 \leq ر \leq ن$

لاحظ أن

① $^{ن}ق_{0} = 1$

② $^{ن}ق_{ن} = 1$

③ $^{ن}ق_{1} = ن$

قوانين التوافيق

① $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{ر}} = \frac{\underline{ن}}{\underline{ر}\ \underline{ن-ر}}$

تدريب 1

إذا كان $^{ن}ل_{ر} = 720$ ، $^{ن}ق_{ر}$ = $^{ن}ق_{ر}$ فأوجد $^{12}ق_{2ر}$

الحل

لاحظ المسألة تحتوى تباديل وتوافيق ولهما نفس الملم والدليل

∴ نستخدم هذا القانون للاختصار

∴ $^{ن}ق_{ر} = 720 \times \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{ر}}$ بحذف $^{ن}ل_{ر}$

∴ $\underline{ر} = 720$

∴ $\underline{ر} = \underline{6}$ ⇐ $ر = 6$

∴ $^{12}ق_{2ر} = {}^{12}ق_{12} = 1$

② $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ قانون التبسيط

تدريب 2

إذا كان: $^{ن}ق_{ن-3} = 56$ أوجد قيمة ن

الحل

لاحظ الملم فيه ن والدليل فيه ن ولحذف ن من الدليل نستخدم هذا القانون

∴ $^{ن}ق_{ن-3} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-3)}$

∴ $^{ن}ق_{3} = 56$

وباستخدام الحاسبة nCr

∴ $^{ن}ق_{3} = {}^{8}ق_{3}$ ∴ $ن = 8$

(٣) قانون التساوى: إذا كان $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$

فإن: $س = ص$ أو $س + ص = ن$

تدريب ٣: إذا كان $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر-٤٧}$ أوجد قيمة ر

الحل

لاحظ أن: الصلم = الصلم ، تساوى توفيقتين ∴ نستخدم قانون التساوى

إما: $ر = ٢ر - ٤٧$

∴ $ر = ٤٧$ مرفوض لأنه بالتعويض فيها يكون الدليل > الصلم

أو $ر + ٢ر - ٤٧ = ٢٨$

$٣ر = ٧٥$

∴ $ر = ٢٥$

تدريب ٥: إذا كان $^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٣} \cdot ٣٠ ن$ أوجد قيمة ن

الحل

$\frac{|ن}{|٣ \, |ن-٣} = \frac{٩١}{٣} ن \Leftarrow \frac{ن(ن-١)(ن-٢)|ن-٣}{٦ \, |ن-٣} = \frac{٩١}{٣} ن$ بالاختصار

∴ $(ن-١)(ن-٢) = ١٨٢$

∴ $ن^٢ - ٣ن + ٢ = ١٨٢$

$ن^٢ - ٣ن - ١٨٠ = ٠$

$ن = ١٥$ ، $ن = -١٢$ مرفوض

حل آخر: لاحظ حاصل ضرب عاملين متتاليين لذلك تحول الى تباديل

∴ $^{ن-١}ل_{٢} = ١٨٢$

$^{ن-١}ل_{٢} = {}^{١٤}ل_{٢} \Leftarrow ن = ١٥$

تدريب ٦: إذا كان $^{ن}ل_{ر-١} = ٦٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر-١} = ٥٦$ فأوجد قيمة ن ، ر

الحل

تدريب ٧

اشترك ٧ أشخاص في مسابقة الشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين أوجد عدد مباريات المسابقة.

الحل

العدد الكلى ٧ والعدد المختار ٢ ولا يوجد ترتيب ∴ نستخدم التوافيق

∴ عدد طرق الاختيار = $^{7}ق_{2}$ = ٢١ طريقة

تدريب ٨

إذا كان لدينا ٢٠ طالب و ١٠ طالبات فبكم طريقة يمكن تكوين لجنة من :-

① ٤ طلاب وطالبتين ② ٤ طلاب أو طالبتين

الحل

لاحظ أن هناك عمليتين للاختيار عملية اختيار طلاب وعملية اختيار طالبات

الترتيب في العمليتين ليس مهم لذلك هانستخدم التوافيق

	طلاب	طالبات
العدد الكلى	٢٠	١٠
العدد المختار	٤	٢

① عدد طرق تكوين ٤ طلاب و طالبتين = $^{20}ق_{4}$ × $^{10}ق_{2}$ = ٢١٨٠٢٥

② عدد طرق تكوين ٤ طلاب أو طالبتين = $^{20}ق_{4}$ + $^{10}ق_{2}$ = ٤٨٩٠

لاحظ

① إذا كان الربط بين اختيارين و نقوم بجمليه X ناتج الاختيارين

② إذا كان الربط بين اختيارين أو نقوم بجمليه + ناتج الاختيارين

تدريب ٩

فصل به ٩ أولاد ، ٦ بنات يراد تكوين فريق مكون من ٤ أفراد من هذا الفصل بحيث يكون الفريق من نفس الجنس

لاحظ أن (i) عندنا عمليتين إختيار والترتيب ليس هام لذلك نستخدم التوافيق

(ii) عملية الإختيار من نفس الجنس معناه ولاد فقط أو بنات فقط

∴ عدد طرق تكوين فريق أولاد فقط أو بنات فقط نستخدم +

	أولاد	بنات
العدد الكلي	٩	٦
العدد المختار	٤	٤

∴ عدد طرق الاختيار = $^{9}C_{4} + ^{6}C_{4} = 141$

تدريب ١٠ كم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قراراً بالأغلبية؟

الحل

لاحظ أن: (i) إختيار اللجنة الترتيب ليس هام لذلك نستخدم التوافيق

(ii) اللجنة ٥ أعضاء وقرار الأغلبية موافقة ٥ أو ٤ أو ٣

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{5}C_{5} + ^{5}C_{4} + ^{5}C_{3} = 16$ طريقة

تدريب ١١ يدرس الطالب في إحدى السنوات الدراسية بالجامعة ثمان مواد مختلفة ولا يمكن له الانتقال الى السنة التالية إلا إذا نجح في ٦ منها على الأقل ، بكم طريقة يمكن للطالب الانتقال الى السنة التالية؟

الحل

لاحظ أن: (i) إختيار الأسئلة الترتيب ليس هام لذلك نستخدم التوافيق

(ii) الطالب عليه الإجابة على ٦ أسئلة أو ٧ أسئلة أو ٨ أسئلة

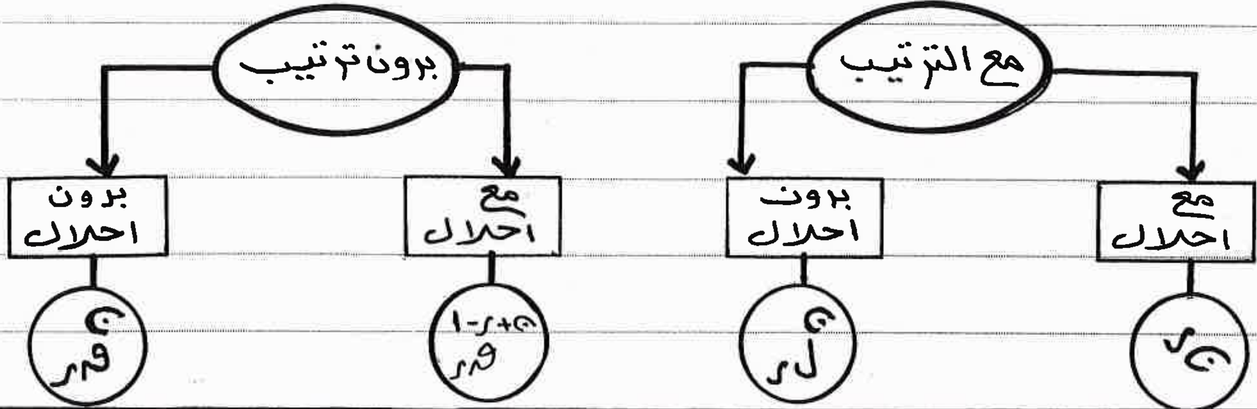
∴ عدد طرق الاختيار = $^{8}C_{6} + ^{8}C_{7} + ^{8}C_{8} = 37$ طريقة

نهاية الجبر "إن كان من خطأ فمن نفسي والشيطان"

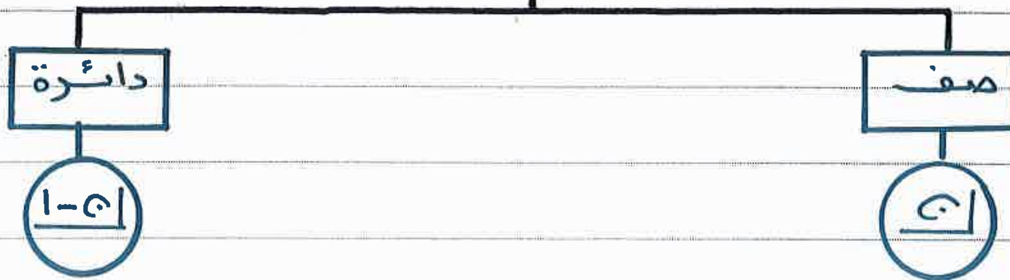
معلومات إثرائية

خريطة مبدأ العد

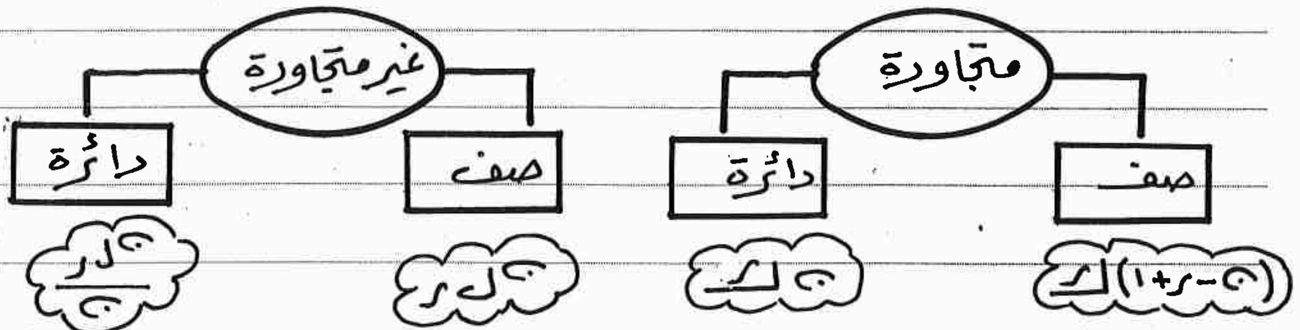
١) عند إختيار (ر) من الأشياء من بين (ن) من الأشياء



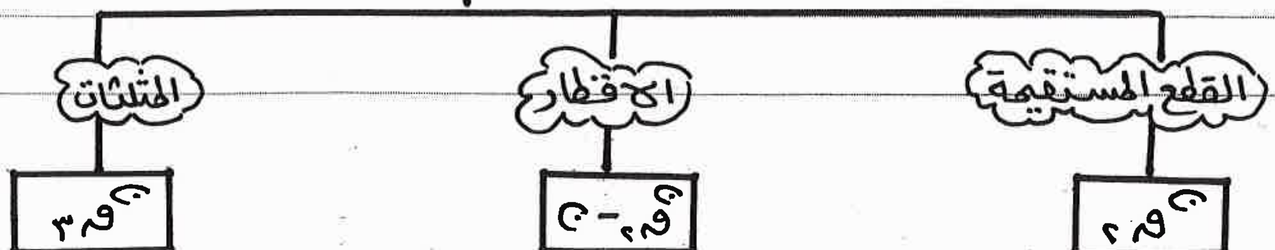
٢) ترتيب (ن) من الأشياء



٣) عند وضع (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن

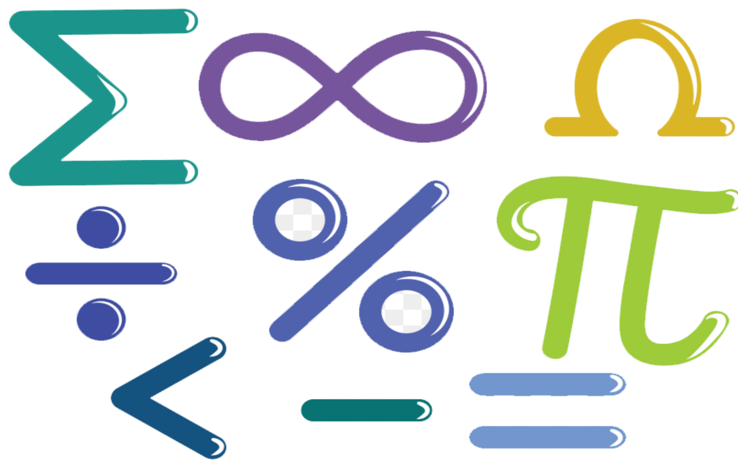


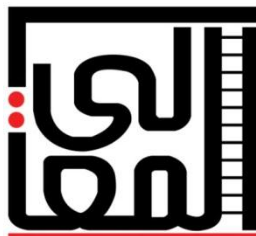
٤) المضلع الذى عدد أضلاعه (ن) عدد



ثانياً :

التفاضل والتكامل





معدل التغير

دالة التغير

إذا كانت : ص = د(س)

إذا تغيرت س : س١ ← س٢ فإن مقدار التغير في س يرمز له بالرمز Δس أي هـ ⟸ هـ = س٢ − س١

الدالة د(س) : د(س١) ← د(س٢) فإن مقدار التغير في الدالة د(س) يرمز له بالرمز Δص أي ت(هـ)

حيث : ت(هـ) = د(س + هـ) − د(س) وتسمى دالة التغير

تدريب ١ إذا كانت : د(س) = ٣س٢ + س − ٢ أوجد :

(١) دالة التغير (٢) مقدار التغير عندما تتغير س من ٢ إلى ٢٫٣

الحل

(١) د(س) = ٣س٢ + س − ٢ ⟵ I

د(س + هـ) = ٣(س + هـ)٢ + (س + هـ) − ٢

∴ د(س + هـ) = ٣س٢ + ٦س هـ + ٣هـ٢ + س + هـ − ٢ ⟵ II

بطرح : II − I ⟸ ∴ ت(هـ) = ٦س هـ + ٣هـ٢ + هـ دالة التغير

(٢) س : ٢ ⟵ ٢٫٣ (س = ٢ ، هـ = ٠٫٣) هـ = ٢٫٣ − ٢ = ٠٫٣

∴ ت(٠٫٣) = ٦ × ٢ × ٠٫٣ + ٣(٠٫٣)٢ + ٠٫٣ = ٤٫١٧

دالة متوسط التغير

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

تدريب ٢ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د(س) = س^{٢} + ٢ ثم أحسب متوسط التغير عندما تتغير س من ٣ إلى ٣٫١

الحل

د(س) = س^{٢} + ٢ ← I

د(س+هـ) = (س+هـ)^{٢} + ٢

= س^{٢} + ٢ س هـ + هـ^{٢} + ٢ ← II

II − I ⟸ ن(هـ) = ٢ س هـ + هـ^{٢} دالة التغير

م(هـ) = $\frac{\text{هـ}(٢\text{س} + \text{هـ})}{\text{هـ}}$ = ٢ س + هـ دالة متوسط التغير

∵ س : ٣ ← (س = ٣ ، هـ = ٠٫١) ← ٣٫١

∴ متوسط التغير م = ٦ + ٠٫١ = ٦٫١

معدل التغير

معدل التغير = نهـــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

تدريب ٣ أوجد معدل التغير للدالة د : د(س) = ٣س^{٢} + ٢ عند س = ٢

الحل

د(س) = ٣ س^{٢} + ٢ ← I

د(س+هـ) = ٣(س+هـ)^{٢} + ٢

= ٣س^{٢} + ٦ س هـ + ٣ هـ^{٢} + ٢ ← II

(i) دالة التغير ن(هـ) = ٦ س هـ + ٣ هـ^{٢}

(ii) دالة متوسط التغير م(هـ) = ٦ س + ٣ هـ   (÷ هـ)

(iii) معدل التغير = نهـــا (هـ ← ٠) ٦ س + ٣ هـ

= ٦ س   عند س = ٢

∴ معدل التغير = ١٢

ملحوظة لاحظ الفرق بين: دالة متوسط التغير و متوسط التغير

دالة متوسط التغير $م(هـ) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ || متوسط التغير $م = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

تدريب ٤ صفيحة مربعة تتمدد بانتظام محتفظة بشكلها. احسب متوسط التغير في مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣سم إلى ٣٫٤سم ثم احسب معدل التغير في مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥سم.

الحل

نفرض: طول ضلع الصفيحة = س

المساحة: مساحة المربع = $س^٢$

$\therefore د(س) = س^٢$

$س_١$	$س_٢$	هـ
٣	٣٫٤	٠٫٤

(أ) متوسط التغير $م = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{د(٣٫٤) - د(٣)}{٣٫٤ - ٣}$

$\therefore م = \frac{(٣٫٤)^٢ - (٣)^٢}{٠٫٤} = ٦٫٤$

(ب) عند س = ٥ ⟸ معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٥+هـ) - د(٥)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[(٥+هـ)^٢] - [٥]^٢}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢٥ + هـ^٢ + ١٠هـ - ٢٥}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} هـ + ١٠$

$\therefore$ معدل التغير في المساحة $= ١٠$

تدريب ٥

(١) معدل تغير الدالة د : د(س) = س² عند س = ١ هو

(أ) ١   (ب) ٢   (ج) صفر   (د) ٣

(٢) متوسط تغير الدالة د حيث د(س) = س² عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ = ---

(أ) ٠,٦١   (ب) ٦,١   (ج) ٩   (د) ٩,٦١

(٣) متوسط التغير في د يساوي ٧ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ وكانت د(٣) = ٨ فإن د(٥) =

(أ) ٢٢   (ب) ١٢   (ج) ٧   (د) غير ذلك

(٤) متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥سم إلى ٧سم = ---

(أ) ١٢٥   (ب) ٢٤٢   (ج) ٢١٨   (د) ١٠٩

(٥) إذا كان متوسط التغير في د يساوي ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير في د =

(أ) ٠,٣٢   (ب) ٠,٤٨   (ج) ٣,٦   (د) ٧,٢

(٦) إذا كان متوسط التغير في د يساوي ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ وكان د(٢) = ٦ فإن د(٤) =

(أ) ٤   (ب) ٧   (ج) ٨   (د) ١٦

(٧) يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أي لحظة زمنية ن (بالدقائق) بالعلاقة :
د(ن) = ٢ن³ + ١٠٠ ملليجرام فإن معدل النمو اللحظي للدالة د عندما ن = ٥ يساوي ---

(أ) ١٥٠   (ب) ١٠٥   (ج) ٢٥٠   (د) ٣٥٠

الإشتقاق

يقال للدالة د أنها قابلة للاشتقاق عند س = م ∈ مجال الدالة إذا وفقط إذا كان:

$$د'(م) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(م+هـ) - د(م)}{هـ}$$ لها وجود

المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى

* **المشتقة اليمنى**

$$د'(م)^{+} = \lim_{هـ \to 0^{+}} \frac{د(م+هـ) - د(م)}{هـ}$$

* **المشتقة اليسرى**

$$د'(م)^{-} = \lim_{هـ \to 0^{-}} \frac{د(م+هـ) - د(م)}{هـ}$$

إذا كان:
- $د'(م)^{+} = د'(م)^{-}$ فإن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = م
- $د'(م)^{+} \neq د'(م)^{-}$ فإن الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = م

ملاحظات

1. عند بحث قابلية الاشتقاق عند نقطة يجب أن تكون النقطة ∈ مجال د
2. إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقاق
3. إذا كانت الدالة غير متصلة فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة
4. إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فإنها متصلة عند هذه النقطة
5. ليس من الضروري عند بحث قابلية الاشتقاق أن نبحث الاتصال

تدريب ١ إبحث قابلية إشتقاق الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} س^{2} + 2 &، س \geq 1 \\ 2س + 1 &، س < 1 \end{cases}$$

عند س = ١

$٢س + ١$	٣	$س^٢ + ٢$
	١	

(i) نوجد $د(١) = س^٢ + ٢ = ١ + ٢ = ٣$

(ii) $دَ(١)^+ = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{[(١+هـ)^٢ + ٢] - ٣}{هـ} = ٢$

(iii) $دَ(١)^- = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{[٢(١+هـ) + ١] - ٣}{هـ} = ٢$

∵ $دَ(٢)^+ = دَ(٢)^-$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

تدريب ٢ إبحث قابلية إشتقاق الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & س < ٣ \\ ٧ - س & س \geq ٣ \end{cases}$$ عند $س = ٣$

الحل

$(٧ - س)$	٣	$(٢س - ١)$

(i) $د(٣) = ٧ - س = ٧ - ٣ = ٤$

(ii) $دَ(٣)^+ = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{د(٣+هـ) - د(٣)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{[٧ - (٣+هـ)] - ٤}{هـ} = -١$

(iii) $دَ(٣)^- = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{د(٣+هـ) - د(٣)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{[٢(٣+هـ) - ١] - ٤}{هـ}$ = غير موجودة

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $س = ٣$

تدريب ٣ أوجد قيمة أ ، ب حتى تكون الدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢ & س < ٢ \\ أس - ٣ب & س \geq ٢ \end{cases}$$ قابلة للاشتقاق عند $س = ٢$

تدريب ٤

(١) تكون الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ إذا كانت:

(أ) $د(أ)^{+} = د(أ)^{-}$ (ب) د متصلة عند س = أ

(ج) $نها_{س \leftarrow أ} د(س) = د(أ)$ (د) $نها_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(أ+هـ) - د(أ)}{هـ}$ لها وجود

---

(٢) إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ فإن ....

(أ) د تكون متصلة عند أ (ب) د تكون قابلة للاشتقاق عند أي نقطة أخرى في مجالها

(ج) $نها_{س \leftarrow أ} د(س)$ غير موجودة (د) $دَ(أ)^{+} \neq دَ(أ)^{-}$

---

(٣) إذا كانت: $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س \leq ٢ \\ ٤س & ، س > ٢ \end{cases}$ فإن دَ(٢) = ..

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) غير موجودة

---

(٤) إذا كانت: $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + أ & ، س \leq ٢ \\ أس + ب & ، س > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن أ + ب = ..

(أ) ٤ (ب) −٤ (ج) −٨ (د) ٨

---

(٥) إذا كانت د دالة وكانت د(١) = ٥ ، دَ(١) = ٤ فإن $نها_{س \leftarrow ١} د(س)$ = ..

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٩ (د) غير موجودة

---

(٦) إذا كانت $نها_{س \leftarrow ٢^{-}} د(س) = ك^{٢} + ٣$ ، $نها_{س \leftarrow ٢^{+}} د(س) = ك - ١$ وكانت الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن ك =

(أ) ٤ (ب) −٤ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{-١}{٤}$

قواعد الإشتقاق

١) إذا كانت: $ص = س^ن$ فإن: $\frac{دص}{دس} = ن س^{ن-١}$ حيث $ن \in ع$

مخرجات:

١) إذا كانت ص = أ فإن $\frac{دص}{دس}$ = صفر حيث أ ثابتة

إذا كانت $ص = أ س^ن$ فإن $\frac{دص}{دس} = أ \times ن س^{ن-١}$ حيث $أ \in ع$

إذا كانت ص = س فإن $\frac{دص}{دس} = ١$

تدريب ١ أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

١) $ص = س^٥$
$ص' =$

٢) $ص = ٧ س^٣$
$ص' =$

٣) $ص = ٩ س$
$ص' =$

٤) $ص = \frac{٤}{٣} \pi س^٣$
$ص' =$

٥) $ص = \sqrt{٣}$
$ص' =$

٦) $ص = ٦ \sqrt{س}$
$ص' =$

تدريب ٢ أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

١) $ص = \frac{١}{س}$

٢) $ص = \frac{٥}{س^٢}$

٣) $ص = \sqrt{س}$

٤) $ص = س \sqrt{س}$

ملحوظة

١) إذا كانت $ص = \frac{أ}{س}$ فإن $ص' = \frac{-أ}{س^٢}$

٢) إذا كانت $ص = \sqrt{دالة}$ فإن $ص' = \frac{\text{مشتقة الدالة } د'(س)}{٢\sqrt{دالة}}$

٢) مشتقة مجموع أو الفرق بين دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س
وكانت ص = د(س) ± ر(س) فإن : $\frac{دص}{دس}$ = د̄(س) ± ر̄(س)

تدريب ٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :-

١) ص = ٣س^٤ − ٥س^٢ + ٣س + ٩

ص̄ =

٢) ص = س (٣س^٢ − ٥س + ٤)

ص̄ =

٣) ص = $\frac{س^٥}{٥}$ + س√٣ س + √٦ س + ٩

ص̄ =

٣) مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س
وكانت : ص = د(س) × ر(س) فإن : ص̄ = د̄(س) × ر(س) + ر̄(س) × د(س)

أي أن : الدالة الأولى × مشتقة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الأولى

تدريب ٤ أوجد $\frac{دص}{دس}$ للدالة ص = (س^٢ + ٣) (س^٣ − ٣س + ١)

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = (س^٢ + ٣) (٣س^٢ − ٣) + (س^٣ − ٣س + ١) (٢س)

= (س^٢ + ٣)(٣س^٢ − ٣) + (٢س)(س^٣ − ٣س + ١)

تدريب ٥ إذا كانت: ص = (س٢ + ١)(س٣ + ٣) أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = (س٢ + ١)(٣س٢) + (س٣ + ٣)(٢س) = (س٢ + ١)(٣س٢) + (٢س)(س٣ + ٣)

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=١}$ = (١ + ١)(٣) + (٢)(١ + ٣) = ١٤

تدريب ٦ إذا كانت: ص = (س − ١)(س + ١)(س٢ + ١)(س٤ + ١)(س٨ + ١)(س١٦ + ١)

أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٢

الحل

٤) مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت: د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت: ص = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر(س) ≠ ٠

فإن: $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{د'(س) \times ر(س) - ر'(س) \times د(س)}{[ر(س)]^{٢}}$

= $\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^{٢}}$

تدريب ٧ إذا كانت ص = $\frac{٣س + ٤}{٥س + ١}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٣ \times (٥س + ١) - ٥ \times (٣س + ٤)}{(٥س + ١)^{٢}}$ = $\frac{-١٧}{(٥س + ١)^{٢}}$

٥) مشتقة قوس مرفوع لأس

إذا كانت : ص = $[د(س)]^ن$ فإن : $\frac{دص}{دس} = ن[د(س)]^{ن-1} \times د\bar{}(س)$

أى أن : ص = $(قوس)^ن$ فإن : ص$\bar{}$ = ن $(قوس)^{ن-1}$ × (مشتقة القوس)

تدريب ٨

١) ص = $(٣س^٢ + ٥س)^٣$ $\frac{دص}{دس}$ =

٢) ص = $\frac{١٥}{(٢س + ٣)^٧}$ $\frac{دص}{دس}$ =

٣) ص = $\sqrt{٣س + ٤}$ $\frac{دص}{دس}$ =

تدريب ٩

١) معدل تغير الدالة د حيث د(س) = $س^{١٥}$ عند س = ١ هو

ⓐ ١ ⓑ ١٥ ⓒ ١٤ ⓓ صفر

٢) إذا كانت : $\frac{د}{دس}(أس^٣) = ٢٤$ فإن قيمة أ عندما س = ١ تساوى

ⓐ ٨ ⓑ ٢ ⓒ ١ ⓓ ٢٤

٣) إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ فإن د$\bar{}$(١) =

ⓐ ١ ⓑ صفر ⓒ -١ ⓓ ٢

٤) إذا كانت د(س) = $س^٥$ فإن : $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ =

ⓐ ٥ ⓑ $٥س^٤$ ⓒ $س^٥$ ⓓ غير موجودة

٥) إذا كانت د$\bar{}$(٢) = ٥ ، د(س) = $س^٢ + أس + ٥$ فإن أ =

ⓐ ٥ ⓑ ٢ ⓒ ١٠ ⓓ ١

٦) مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

إذا كانت: ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع

ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن: ص = د [ر(س)] تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

تدريب ١٠ إذا كانت: ص = $ع^٥$ ، ع = $س^٢ - ٣س + ١$ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

ص = $ع^٥$ ← I

ع = $س^٢ - ٣س + ١$ ← II

بالتعويض من II في I

∴ ص = $(س^٢ - ٣س + ١)^٥$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥(س^٢ - ٣س + ١)^٤ \times (٢س - ٣)$

أو:

ص = $ع^٥$ ∴ $\frac{دص}{دع} = ٥ع^٤$

ع = $س^٢ - ٣س + ١$ ∴ $\frac{دع}{دس} = ٢س - ٣$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= ٥ع^٤ \times (٢س - ٣)$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥(س^٢ - ٣س + ١)^٤ \times (٢س - ٣)$

تدريب ١١ إذا كانت ص = $(ع + ١)^٥$ ، ع = $س^٣ - ١$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١

الحل

ص = $(ع + ١)^٥$ ← I

ع = $س^٣ - ١$ ← II

∴ ص = $(س^٣ - ١ + ١)^٥$

ص = $(س^٣)^٥ = س^{١٥}$

$\frac{دص}{دس} = ١٥س^{١٤}$

عند س = ١ ⇐ $\frac{دص}{دس} = ١٥ \times ١ = ١٥$

أو:

$\frac{دص}{دع} = ٥(ع + ١)^٤ \times (١)$

$\frac{دع}{دس} = ٣س^٢$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥(ع + ١)^٤ \times (٣س^٢)$

عند س = ١ ∴ ع = صفر

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥(٠ + ١)^٤ \times (٣)$

∴ $\frac{دص}{دس} = ١٥$

ملحوظة إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{د}{دس}(ص^ن) = ن ص^{ن-١} \times \frac{دص}{دس}$

تدريب ١٢

① $\frac{د}{دس}(ص^٤) = ٤ص^٣ \frac{دص}{دس}$ ② $\frac{د}{دس}(ص^٧) = ٧ص^٦ \frac{دص}{دس}$

③ $\frac{د}{دع}(س^٥) = ٥س^٤ \frac{دس}{دع}$ ④ $\frac{د}{دس}(س^٥) = ٥س^٤$

تدريب ١٣ إذا كانت $ص = ع^٢ + ع$ ، $ع = ٢س^٢$ إثبت أن : $\frac{دص}{دس} - \frac{دع}{دس} = ١٦س^٣$

الحل

$ص = ع^٢ + ع$ $ع = ٢س^٢$

$\frac{دص}{دع} = ٢ع + ١$ $\frac{دع}{دس} = ٤س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = (٢ع + ١) \times ٤س$

$= (٤س^٢ + ١) \times ٤س = ١٦س^٣ + ٤س$

$ط_١ = ١٦س^٣ + ٤س - ٤س = ١٦س^٣$ #

تدريب ١٤ إذا كانت $ص = ع^٢ + ٣ع + ٥$ ، $ع = \sqrt{س^٢ + ٥}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ٢$

الحل

$ص = ع^٢ + ٣ع + ٥$ $ع = \sqrt{س^٢ + ٥}$

$\frac{دص}{دع} = ٢ع + ٣$ $\frac{دع}{دس} = \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢ + ٥}}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٢ع + ٣) \times \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ٥}}$

عند $س = ٢$ $\therefore ع = \sqrt{٤ + ٥} = ٣$

$\therefore \frac{دص}{دس} = (٢ \times ٣ + ٣) \times \frac{٢}{\sqrt{٤ + ٥}} = ٦$



تراكيب ١٥

(١) $\frac{ء}{ءس}(ص^٥) =$

(أ) $٥ص^٤$ (ب) $٥ص^٤ صَ$ (ج) $ص^٥ صَ$ (د) $\frac{٥ص^٤}{صَ}$

(٢) إذا كانت $ص = \frac{١}{\sqrt{س}}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} =$

(أ) $\frac{-١}{٢\sqrt{س}}$ (ب) $\frac{-١}{٢س}$ (ج) $\frac{-١}{٢س\sqrt{س}}$ (د) $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

(٣) إذا كانت $ص = ع^٢$ ، $ع = ٣س^٢ - ٢$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = ٢$ تساوي

(أ) ٢٤ (ب) ٢٤٠ (ج) ٤٢٠ (د) ١٢٠

(٤) إذا كانت $ص = (س^٢ - ٢)^٥$ فإن $\frac{ءص}{ءس} =$

(أ) $٥(س^٢-٢)^٤$ (ب) $١٠س(س^٢-٢)^٤$ (ج) $٢٢س^٥$ (د) $٢س(س^٢-٢)^٥$

(٥) إذا كانت $ص = (ع+١)^٣$ ، $ع = س^٥ - ١$ فإن $\frac{ءص}{ءس} =$

(أ) $س^{١٥}$ (ب) $س^٨$ (ج) $١٥س^{١٤}$ (د) $٨س^٧$

(٦) إذا كانت $ص = (س+ك)^٣$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ١٢$ عند $س =$ صفر فإن $ك =$

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (ج) -٢ (د) ٤

(٧) إذا كانت $ص^٤ = س^٣$ فإن $\frac{ءص}{ءس} =$

(أ) $\frac{٣}{٤}س^{-\frac{١}{٤}}$ (ب) $\frac{س^٢}{٤ص^٣}$ (ج) $\frac{٣س^٢}{ص^٣}$ (د) $\frac{٣}{٤\sqrt[٣]{س}}$

(٨) إذا كانت $د(س) = \sqrt{س^٢+٩}$ فإن $دَ(-٤) =$

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) ٥ (ج) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

مشتقة الدوال المثلثية

إذا كان:

إذا كان		فإن
ص = جا س	← فإن ←	ص' = جتا س
ص = جتا س		ص' = − جا س
ص = ظا س		ص' = قا² س

نتائج

إذا كان:

إذا كان		فإن
ص = جا(أ س + ب)	← فإن ←	ص' = أ جتا(أ س + ب)
ص = جتا(أ س + ب)		ص' = − أ جا(أ س + ب)
ص = ظا(أ س + ب)		ص' = أ قا²(أ س + ب)

تدريب ١ أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:-

① ص = جا ٤ س
ص' =

② ص = جتا ٣ س
ص' =

③ ص = ظا ٤ س
ص' =

④ ص = جا(٣ س + ٤)
ص' =

⑤ ص = جتا(٥ س + ٣)
ص' =

⑥ ص = ظا(−٥ س² + ١٩)
ص' =

تدريب ٢

① $\frac{د}{د س}$ (ظا ٣ س²) =

② $\frac{د}{د س}$ (ظا $\frac{\pi}{4}$ س) =

③ $\frac{د}{د س}$ (ظا $\frac{\pi}{4}$) =

تدريب ٢ أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي :-

١) ص = $س^٢$ + جا س $\frac{دص}{دس}$ =

٢) ص = جا $\frac{\pi}{٢}$ − ٧ جا س $\frac{دص}{دس}$ =

٣) ص = ٢ جتا س − ظا س $\frac{دص}{دس}$ =

٤) ص = $جتا^٢$ (٤س − ٧) $\frac{دص}{دس}$ =

٥) ص = جا (جتا س) $\frac{دص}{دس}$ =

٦) ص = س جا س $\frac{دص}{دس}$ =

٧) ص = $س^٢$ جتا ٣س $\frac{دص}{دس}$ =

٨) ص = جا س جتا س $\frac{دص}{دس}$ =

٩) ص = $\frac{جا س}{س}$ $\frac{دص}{دس}$ =

تدريب ٣ إذا كان ص = جا س + جا ٢س أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = جتا س + ٢ جتا ٢س

$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س = ٩٠°}$ = جتا ٩٠° + ٢ جتا ١٨٠° = ٠ + ٢ × −١ = −٢

تدريب ٤ إذا كان ص = (جاس + جتاس)^2 إثبت أن $\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا ٢س

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ (جاس + جتاس) × (جتاس − جاس)

= ٢ (جتا^{2}س − جا^{2}س) لاحظ جتا ٢س = جتا^{2}س − جا^{2}س

= ٢ جتا ٢س

تدريب ٥ إذا كان ص = قا ٤س أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = $\frac{\pi}{4}$

الحل

∴ معدل التغير = المشتقة الأولى للدالة = $\frac{دص}{دس}$

∴ ص = قا ٤س

∴ ص = $\frac{1}{جتا ٤س}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٠ - (-٤ جا ٤س)}{(جتا ٤س)^2}$ = $\frac{٤ جا ٤س}{(جتا ٤س)^2}$

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س = \frac{\pi}{4}}$ = $\frac{٤ جا \pi}{(جتا \pi)^2}$ = $\frac{صفر}{(-١)^2}$ = صفر

تدريب ٦

(١) إذا كان: ص = قاس فإن ص َ =

(أ) قاس (ب) قاس ظاس (جـ) $\frac{1}{ظاس}$ (د) $\frac{-1}{جتا^2 س}$

(٢) $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{جا(\frac{\pi}{4} + هـ) - جا(\frac{\pi}{4})}{هـ}$ =

(أ) جاهـ (ب) جتاهـ (جـ) جتا $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{جاهـ}{هـ}$

(٣) اذا كانت: د(س) = ظا (٥س − π) فإن: دَ($\frac{\pi}{4}$) =

(أ) ٥ (ب) ٥√٢ (جـ) ١٠ (د) ١٠√٣

تطبيقات على المشتقة

* ميل الخط المستقيم

① $م = \frac{-ب}{أ}$ إذا علم معادلة أس + ب ص + جـ = ٠

② $م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ إذا علم نقطتين على المستقيم (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

③ م = ظا θ إذا صنع المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية "θ"

④ $م = \frac{ب}{أ}$ إذا علمت معادلة الاتجاهية ر = (س١ ، ص١) + ك (أ ، ب)

ملاحظات

① المستقيم الذي يوازي محور السينات ميله = صفر

② المستقيم الذي يوازي محور الصادات ميله = غير معرف = $\frac{1}{0}$

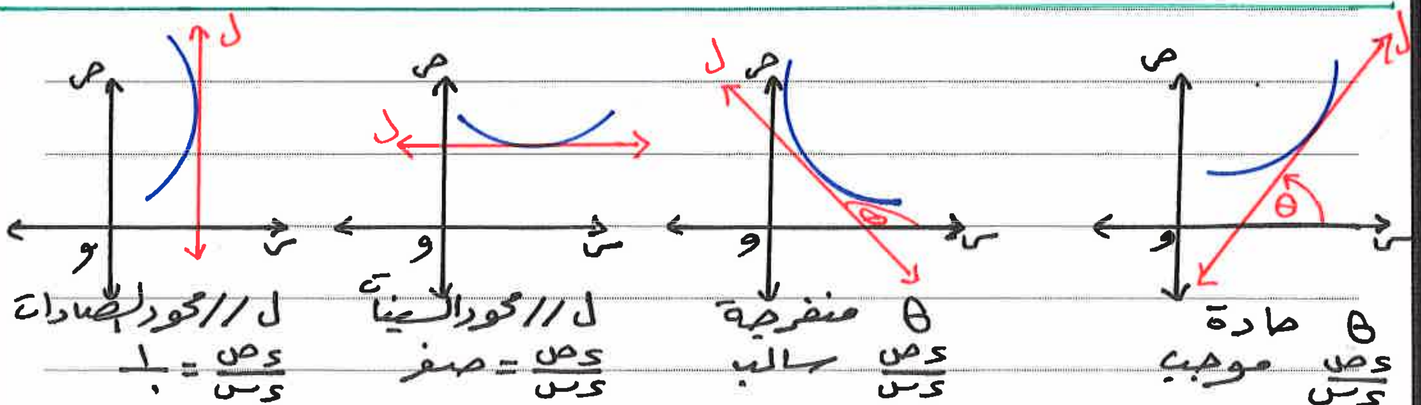
③ إذا كان ل١ // ل٢ فإن م١ = م٢

④ إذا كان ل١ ⊥ ل٢ فإن م١ × م٢ = -١

* ميل المنحنى

ميل المماس للمنحنى : هو المشتقة الأولى للدالة عند نقطة التماس (س١ ، ص١)

ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(س_1 ، ص_1)}$



معادلة المماس: $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$ ، معادلة العمودي: $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{-١}{م}$

تدريب ١

أوجد ميل المماس للمنحنى $ص = ٢س^٣ - س^٢ + ١$ عند النقطة $(١ ، ٢)$ الواقعة عليه

الحل

(i) نقطة التماس: $(١ ، ٢)$

(ii) المنحنى: $ص = ٢س^٣ - س^٢ + ١$

(iii) ميل المماس: $\frac{دص}{دس} = ٦س^٢ - ٢س$ بالتعويض عند $س = ١$

$م = ٦ - ٢ = ٤$

تدريب ٢

أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى $ص = س^٣ - س^٢ + ٣$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $(١ ، ٣)$ الواقعة عليه

الحل

(i) نقطة التماس: $(١ ، ٣)$

(ii) المنحنى: $ص = س^٣ - س^٢ + ٣$

(iii) ميل المماس: $\frac{دص}{دس} = ٣س^٢ - ٢س$ عند $س = ١$

$م = ٣ - ٢ = ١$

$\because م = ظا θ \quad \therefore ظا θ = ١ \Leftarrow θ = ٤٥°$

تدريب ٣

أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى $ص = ٢س^٣ - ٤س^٢ + ٣$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتي إحداثيها السيني يساوي ٢

الحل

(i) نقطة التماس: $س = ٢$ نوجد $ص = ٢ \times ٨ - ٤ \times ٤ + ٣ = ٣$ $(٢ ، ٣)$

(ii) المنحنى: $ص = ٢س^٣ - ٤س^٢ + ٣$

(iii) ميل المماس: $\frac{دص}{دس} = ٦س^٢ - ٨س$ عند $س = ٢$

$م = ٦ \times ٤ - ٨ \times ٢ = ٨$

∴ معادلة المماس:

$$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = ٨$$

$$\text{ص} - ٨\text{س} + ١٣ = ٠$$

معادلة العمودي

$$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{-١}{٨}$$

$$∴ ٨\text{ص} + \text{س} - ٢٦ = ٠$$

تدريب ٤ أوجد معادلة العمودي لمنحنى الدالة $\text{ص} = \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣$ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع محور السينات

الحل

(i) نقطة التماس: لإيجاد نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع $\text{ص} = ٠$

$$∴ \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣ = ٠$$

∴ $\text{س} = ١$ ∴ $\text{ص} = ٠$ ∴ $(١ ، ٠)$

$\text{س} = -٣$ ، $\text{ص} = ٠$ ∴ $(-٣ ، ٠)$

(ii) المنحنى: $\text{ص} = \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣$

(iii) ميل المماس: $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٢\text{س} + ٢$

عند النقطة $(١ ، ٠)$

$$\text{م}_١ = ٤$$

∴ معادلة العمودي: $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ١} = \frac{-١}{٤}$

$$∴ ٤\text{ص} + \text{س} - ١ = ٠$$

عند النقطة $(-٣ ، ٠)$

$$\text{م}_٢ = -٤$$

$$\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} + ٣} = \frac{١}{٤}$$

$$∴ ٤\text{ص} - \text{س} - ٣ = ٠$$

تدريب ٥ أوجد النقطة الواقعة على المنحنى $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤$ والتي ميل المماس للمنحنى عندها يساوي ٥

الحل

(i) المنحنى: $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤$

(ii) ميل المماس: $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٢\text{س} - ٥$

(iii) الشرط: $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٥ \Leftarrow ٢\text{س} - ٥ = ٥ \Leftarrow \text{س} = ٥$

بالتعويض: ∴ $\text{ص} = ٤$ ∴ النقطة $(٥ ، ٤)$

تدريب ٦ أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^{٣} - ٢س + ٥$ والتي عندها المماس للمنحنى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$

الحل

(i) المنحنى : $ص = س^{٣} - ٢س + ٥$

(ii) ميل المماس : $\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ٢$

(iii) الشرط : $\frac{دص}{دس} = ظا ٤٥^{\circ} = ١$

$\therefore ٣س^{٢} - ٢ = ١$

$\therefore س = ١ \quad \therefore ص = ١ - ٢ + ٥ = ٤$

$س = -١ \quad \therefore ص = -١ + ٢ + ٥ = ٦$

النقط هي $(١ ، ٤)$ ، $(-١ ، ٦)$

تدريب ٦ أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س - ١٥$ والتي يكون المماس عندها موازيا محور السينات

الحل

(i) المنحنى : $ص = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س - ١٥$

(ii) ميل المماس : $\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$

(iii) الشرط : المماس // محور السينات $\therefore \frac{دص}{دس} = ٠$

$\therefore ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤ = ٠$

$\therefore س = ٢ \quad \therefore ص = ٨ - ٣٦ + ٤٨ - ١٥ = ٥$

$س = ٤ \quad \therefore ص = ٦٤ - ١٤٤ + ٩٦ - ١٥ = ١$

$\therefore$ النقط هي : $(٢ ، ٥)$ ، $(٤ ، ١)$

تدريب ٧ أوجد قيمة أ التي تجعل المستقيم $ص = ٤س + أ$ مماسا للمنحنى $ص = س^{٢} + ٥$

الحل

(i) المنحنى : $ص = س^{٢} + ٥$

(ii) ميل المماس : $\frac{دص}{دس} = ٢س$

(iii) الشرط : المستقيم يمس المنحنى

∴ ميل المستقيم = ميل المنحنى

٤ = ٢س ⟸ س = ٢

⟸ ص = ٤ + ٥ = ٩

∴ ص = ٤س + أ

٩ = ٤ × ٢ + أ ⟸ أ = ١

تدريب ٨

① ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جاس جتاس يساوي

(أ) جتاس جاس　　(ب) جتا²س − جا²س

(ج) جا²س − جتا²س　　(د) جا²س + جتا²س

② ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س − ٣)^٥ عند س = ٢ يساوي

(أ) ١　　(ب) $\frac{1}{12}$　　(ج) ٥　　(د) ١٠

③ إذا كانت معادلة العمودي لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (٢، −١) هي س − ٢ص = ٤ فإن د̅(٢) =

(أ) ٢　　(ب) −٢　　(ج) ١　　(د) −١

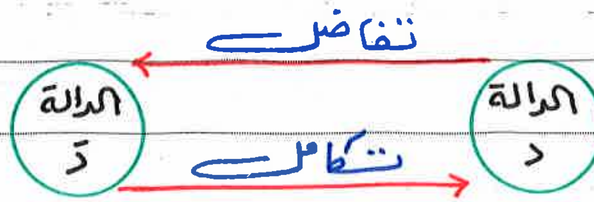
④ إذا كان المستقيم ص + س = ١ يمس منحنى الدالة د(س) = س² − ٣س + أ فإن أ =

(أ) ١　　(ب) ٢　　(ج) ٣　　(د) ٤

⑤ إذا كان المماس للمنحنى ص = س³ − ٣س² يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية منفرجة فإن س ∈

(أ) [٠، ٢]　　(ب)]٠، ٢[　　(ج) ح − [٠، ٢]　　(د) ح −]٠، ٢[

التكامل



قاعدة

$\int س^ن = \frac{1}{ن+1} س^{ن+1} +$ ث حيث ث ثابت التكامل ، $ن \neq -1$

تدريب ١

① $\int س^٦ \, ء س =$

② $\int \frac{1}{س^٤} \, ء س =$

③ $\int \sqrt[٣]{س} \, ء س =$

④ $\int س^{\frac{٢}{٥}} \, ء س =$

خواص التكامل

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ما فإنه :-

① $\int أ \, ء س = أ س +$ ث حيث أ ثابت $\neq$ صفر

② $\int أ \, د(س) \, ء س = أ \int د(س) \, ء س$ حيث أ ثابت $\neq$ صفر

③ $\int [د(س) \pm ر(س)] \, ء س = \int د(س) \, ء س \pm \int ر(س) \, ء س$

تدريب ٢

① $\int ٧ \, ء س =$

② $\int \pi \, ء س =$

③ $\int ٤ س \, ء س =$

٤) $\int \frac{1}{2}\text{س}^{3}\,\text{ء س} =$

٥) $\int (4\text{س} + 5)\,\text{ء س} =$

٦) $\int (\text{س}^{2} - 6\text{س} + 4)\,\text{ء س} =$

٧) $\int \text{س}(\text{س} + 3)\,\text{ء س} =$

٨) $\int (\text{س} - 2)(\text{س} - 3)\,\text{ء س} =$

٩) $\int \left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)^{2}\,\text{ء س} =$

١٠) $\int \frac{\text{س}^{2} - 4}{\text{س} - 2}\,\text{ء س} =$

١١) $\int \frac{\text{س}^{3} - 27}{\text{س} - 3}\,\text{ء س} =$

بعض قواعد التكامل

١) $\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ء س} = \frac{1}{\text{أ}(\text{ن}+1)}(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+1} + \text{ث}$

٢) $\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}} \times \text{دَ}(\text{س})\,\text{ء س} = \frac{1}{\text{ن}+1}[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+1} + \text{ث}$

أي: $\int (\text{دالة})^{\text{ن}} \times (\text{مشتقة الدالة})\,\text{ء س} = \frac{1}{\text{ن}+1}(\text{دالة})^{\text{ن}+1} + \text{ث}$

تدريب ٣

① $\int (\text{٣س} + ٧)^{٤} \, \text{ء س}$

② $\int \frac{٦}{(\text{٢س} + ١)^{٥}} \, \text{ء س}$

③ $\int \sqrt{\text{٤س} + ١} \, \text{ء س}$

④ $\int (\text{س}^{٢} - \text{٤س} + ٤)^{\frac{٧}{٢}} \, \text{ء س}$

تدريب ٤

① $\int \text{س} (\text{٥س}^{٢} + ٢)^{٧} \, \text{ء س}$

② $\int \frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}^{٤} + ١)^{٦}} \, \text{ء س}$

الحل

(١) $\text{د(س)} = \text{٥س}^{٢} + ٢ \qquad \text{د}'\text{(س)} = \text{١٠س}$

لاحظ وجود (س) فقط ولا يوجد (١٠)

لذلك يتم تعديل المسألة بالضرب $\frac{١}{١٠} \times ١٠$

$\therefore \frac{١}{١٠} \int (\text{٥س}^{٢} + ٢)^{٧} \times (\text{١٠س}) \, \text{ء س}$

دالة × مشتقة الدالة

$\therefore I = \frac{١}{٨٠} (\text{٥س}^{٢} + ٢)^{٨} + \text{ث}$

(٢) لازم نضبط المسألة أولاً

$\int \text{س}^{٣} (\text{س}^{٤} + ١)^{-٦} \, \text{ء س}$

$\text{د(س)} = \text{س}^{٤} + ١ \qquad \text{د}'\text{(س)} = \text{٤س}^{٣}$

لاحظ وجود (س³) فقط ولا يوجد (٤)

لذلك يتم تعديل المسألة بالضرب $\frac{١}{٤} \times ٤$

$\therefore \frac{١}{٤} \int (\text{س}^{٤} + ١)^{-٦} \times (\text{٤س}^{٣}) \, \text{ء س}$

دالة × مشتقة الدالة

$I = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{-٥} (\text{س}^{٤} + ١)^{-٥} + \text{ث}$

③ $\int (\text{س}^{٢} + \text{٣س} - ٢)^{٩} (\text{٢س} + ٣) \, \text{ء س}$

$\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + \text{٣س} - ٢ \qquad \text{د}'\text{(س)} = \text{٢س} + ٣$

$\therefore I = \frac{١}{١٠} (\text{س}^{٢} + \text{٣س} - ٢)^{١٠} + \text{ث}$

④ $\int (\text{٣س}^{٢} - \text{٢س} + ١)^{١١} (\text{٣س} - ١) \, \text{ء س}$

$\text{د(س)} = \text{٣س}^{٢} - \text{٢س} + ١ \qquad \text{د}'\text{(س)} = \text{٦س} - ٢$

$I = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١٢} (\text{٣س}^{٢} - \text{٢س} + ١)^{١٢} + \text{ث}$

تكامل الدوال المثلثية

معلومات سابقة يجب أن نعرفها

- $1 + ظتا^2 س = قتا^2 س$
- $1 + ظا^2 س = قا^2 س$
- $جا^2 س + جتا^2 س = 1$
- $قتا س = \frac{1}{جا س}$
- $قا س = \frac{1}{جتا س}$
- $ظتا س = \frac{جتا س}{جا س}$
- $ظتا س = \frac{1}{ظا س}$
- $ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$

① $\int جا س \, ء س = - جتا س + ث$

② $\int جتا س \, ء س = جا س + ث$

③ $\int قا^2 س \, ء س = ظا س + ث$

تعميم

① $\int جا(أ س + ب) \, ء س = \frac{-1}{أ} جتا(أ س + ب) + ث$

② $\int جتا(أ س + ب) \, ء س = \frac{1}{أ} جا(أ س + ب) + ث$

③ $\int قا^2(أ س + ب) \, ء س = \frac{1}{أ} ظا(أ س + ب) + ث$

تدريب ١

① $\int جا ٣ س \, ء س$

② $\int جتا ٥ س \, ء س$

③ $\int قا^2 ٤ س \, ء س$

④ $\int (س - جا س) \, ء س$

٥) ∫ (٤س − قا² $\frac{س}{٢}$) ءس

٦) ∫ قا² ($\frac{\pi}{٤}$ − س) ءس

٧) ∫ قا² $\frac{\pi}{٤}$ ءس

٨) ∫ (٤ جتا² س + $\frac{١}{جتا^٢ س}$ + ١) ءس

٩) ∫ (طا² ٣س + جتا² ٣س + ظا² ٣س) ءس

تذكر

١) ٢ جا س جتا س = جا ٢س

٢) جتا² س − جا² س = جتا ٢س

٣) جا² س = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س

٤) جتا² س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س

٥) ظا² س = قا² س − ١

تدريب ٢

١) ∫ (جا س + جتا س)² ءس

٢) ∫ (جا س + ١)² ءس

الحل

١) ∫ (جا² س + ٢ جا س جتا س + جتا² س) ءس

= ∫ (جا ٢س + ١) ءس

I = س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + ث

٢) ∫ (جا² س + ٢ جا س + ١) ءس

= ∫ (٢ جا س + ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س) + ١) ءس

= ∫ (٢ جا س + $\frac{٣}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س) ءس

I = $\frac{٣}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢س − ٢ جتا س + ث

تدريب ٣

(١) $\int \frac{\text{حتا}^2 س}{1 + \text{حا}س} \, ءس$ (٢) $\int \frac{\text{حتا}٢س}{\text{حتا}س + \text{حا}س} \, ءس$

الحل

(١)

$\int \frac{1 - \text{حا}^2 س}{1 + \text{حا}س} \, ءس$

$\int \frac{(1 - \text{حا}س)(1 + \text{حا}س)}{(1 + \text{حا}س)} \, ءس$

$\int (1 - \text{حا}س) \, ءس$

$I = س + \text{حتا}س + ث$

(٢)

$\int \frac{\text{حتا}^2 س - \text{حا}^2 س}{\text{حتا}س + \text{حا}س} \, ءس$

$\int \frac{(\text{حتا}س - \text{حا}س)(\text{حتا}س + \text{حا}س)}{(\text{حتا}س + \text{حا}س)} \, ءس$

$\int (\text{حتا}س - \text{حا}س) \, ءس$

$I = \text{حا}س + \text{حتا}س + ث$

تدريب ٤

(١) $\int \text{حتا}^2 س \, ءس$ (٢) $\int \text{حا}^5 س \, \text{حتا}س \, ءس$

الحل

(١)

$\int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{حتا}٢س) \, ءس$

$\int (1 + \text{حتا}٢س) \, ءس$

$I = س + \frac{1}{2} \text{حا}٢س + ث$

(٢)

$د(س) = \text{حا}س \qquad د'(س) = \text{حتا}س$

$\int (\text{حا}س)^5 \times (\text{حتا}س) \, ءس$

دالة × مشتقة الدالة

$I = \frac{1}{6} \text{حا}^6 س + ث$

تدريب ٥

$\int \text{ظا}^4 س \, \text{قا}^2 س \, ءس$

تدريب ٦

① $\int (\text{س}+2)(\text{س}-2)\,\text{ءس} =$

(أ) $\text{س}^2+4+\text{ث}$ (ب) $\frac{1}{3}\text{س}^3-4\text{س}+\text{ث}$ (ج) $(\text{س}^2-4)^2+\text{ث}$ (د) $\text{س}^3-4\text{س}+\text{ث}$

② $\int \frac{\text{س}^2+3\text{س}}{\text{س}}\,\text{ءس} =$

(أ) $\text{س}+3$ (ب) $\frac{1}{2}\text{س}^2+3\text{س}+\text{ث}$ (ج) $\text{س}^2+3\text{س}+\text{ث}$ (د) $\frac{\text{س}^3+3\text{س}^2}{\text{س}^2}$

③ $\int (\text{س}+5)^3\,\text{ءس} =$

(أ) $(\text{س}+5)^4+\text{ث}$ (ب) $\frac{1}{4}(\text{س}+5)^4$ (ج) $\frac{1}{4}(\text{س}+5)^4+\text{ث}$ (د) $\frac{1}{5}(\text{س}+5)^4+\text{ث}$

④ $\int (\text{س}+2)(\text{س}^2+4\text{س}-7)^{11}\,\text{ءس} =$

(أ) $\frac{1}{24}(\text{س}^2+4\text{س}-7)^{12}+\text{ث}$ (ب) $\frac{1}{24}(\text{س}^2+4\text{س}-7)^{12}$

(ج) $\frac{1}{24}(\text{س}^2+4\text{س}-7)^{11}+\text{ث}$ (د) $24(\text{س}^2+4\text{س}-7)^{12}+\text{ث}$

⑤ $\int (\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س})^7\,\text{ءس} =$

(أ) $1+\text{ث}$ (ب) $\text{س}+\text{ث}$ (ج) س (د) $\frac{1}{8}(\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س})^8+\text{ث}$

⑥ $\int (2\,\text{جتا}^2\text{س}-1)\,\text{ءس} =$

(أ) $\text{جا}\,2\text{س}+\text{ث}$ (ب) $\frac{1}{2}\text{جا}\,2\text{س}+\text{ث}$ (ج) $\frac{1}{2}\text{جتا}\,2\text{س}+\text{ث}$ (د) $\text{جتا}\,2\text{س}+\text{ث}$

⑦ $\int 2\,\text{جاس جتاس}\,\text{ءس} =$

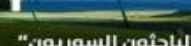
(أ) $-\text{جتا}\,2\text{س}+\text{ث}$ (ب) $\frac{1}{2}\text{جتا}\,2\text{س}+\text{ث}$ (ج) $-\frac{1}{2}\text{جتا}\,2\text{س}+\text{ث}$ (د) $-\frac{1}{2}\text{جتا}\,2\text{س}$

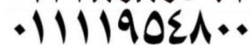
⑧ $\int \text{جا}\frac{\pi}{2}\,\text{ءس} = \ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) 1 (ب) $\frac{1}{2}\text{س}$ (ج) س^2 (د) س

ثالثاً :

حساب المثلثات

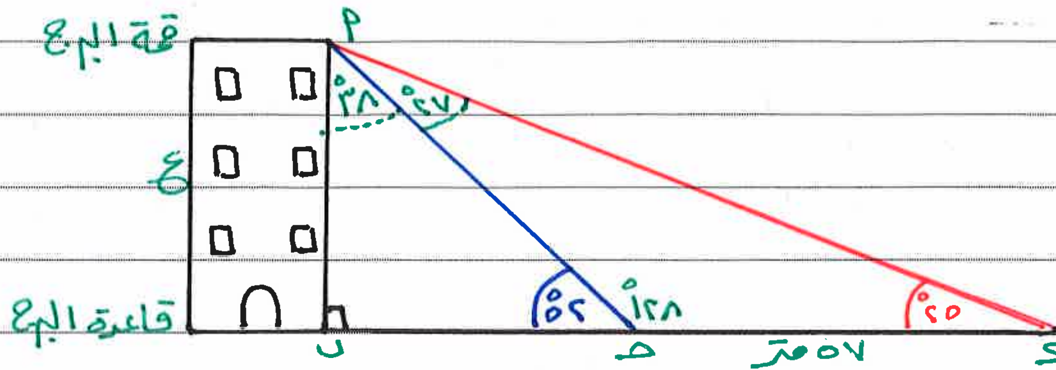




٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

زوايا الإرتفاع والإنخفاض

١) من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية إرتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° ثم سار الرجل في خط مستقيم مسافة ٥٧ متر نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة البرج ٥٢° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر.



في Δ أ د ح | | في Δ أ ب ح
معلوم | مشترك | مطلوب
د ح = ٥٧ | أ ح | أ ب

$$\frac{٥٧}{جا ٢٧°} = \frac{أ ح}{جا ٢٥°}$$

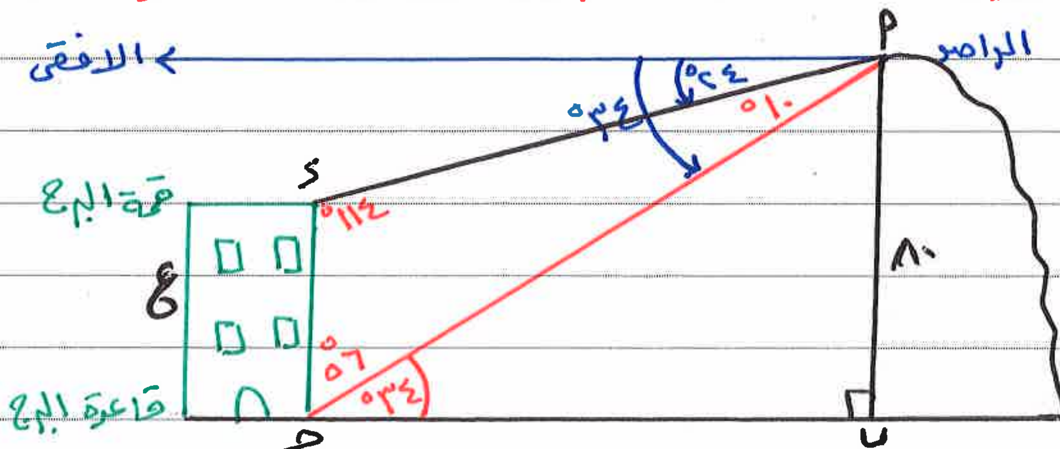
$$\frac{أ ح}{جا ٩٠} = \frac{أ ب}{جا ٥٢°}$$

$$أ ح = \frac{٥٧ \times جا ٢٥°}{جا ٢٧°}$$

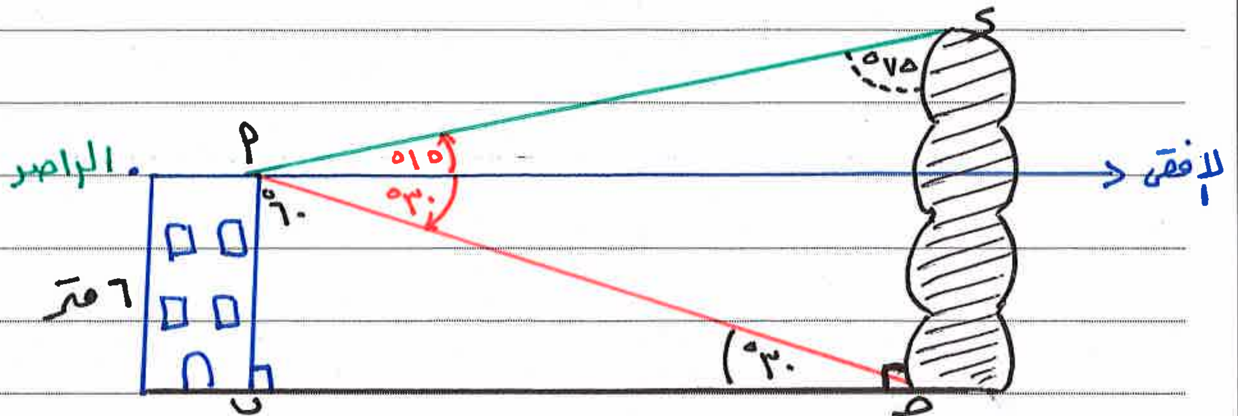
$$أ ب = \frac{أ ح \times جا ٥٢°}{جا ٩٠°} \simeq ٤٢ \text{ متر}$$

---

٢) من قمة صخرة إرتفاعها ٨٠ متر قيست زاويتا إنخفاض قمة وقاعدة الصخرة فوجدتا ٢٤° ، ٣٤° على الترتيب أوجد إرتفاع الصخرة لأقرب متر.



③ من شرفة منزل إرتفاعه ٦ أمتار عن سطح الأرض قيست زاوية إرتفاع قمة شجرة ١٥° وزاوية انخفاض قاعدتها ٣٠° أوجد إرتفاع الشجرة



في Δ أ ب هـ   في Δ أ هـ د

معلوم   مشترك   مطلوب

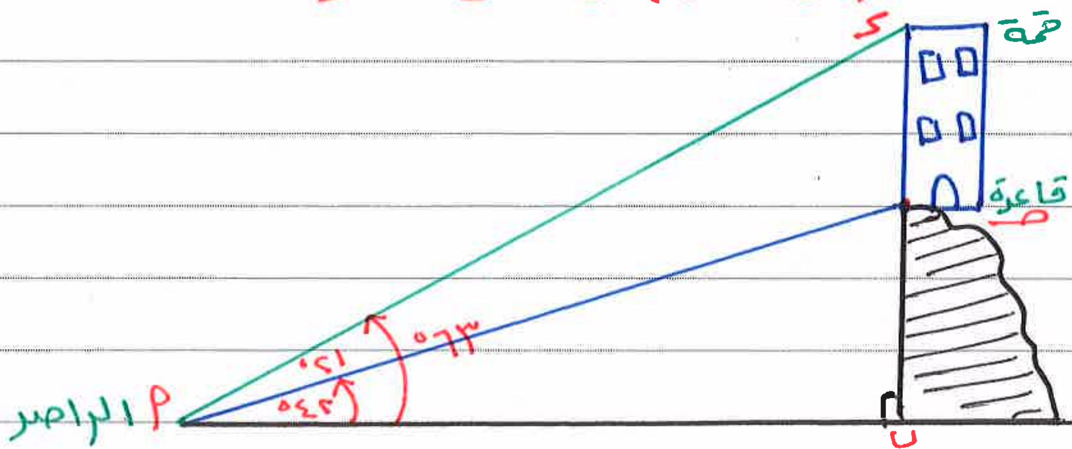
أ ب = ٦   أ هـ   د هـ

$\frac{٦}{\text{جا } ٣٠°} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٩٠}$ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٧٥°} = \frac{\text{د هـ}}{\text{جا } ٤٥°}$

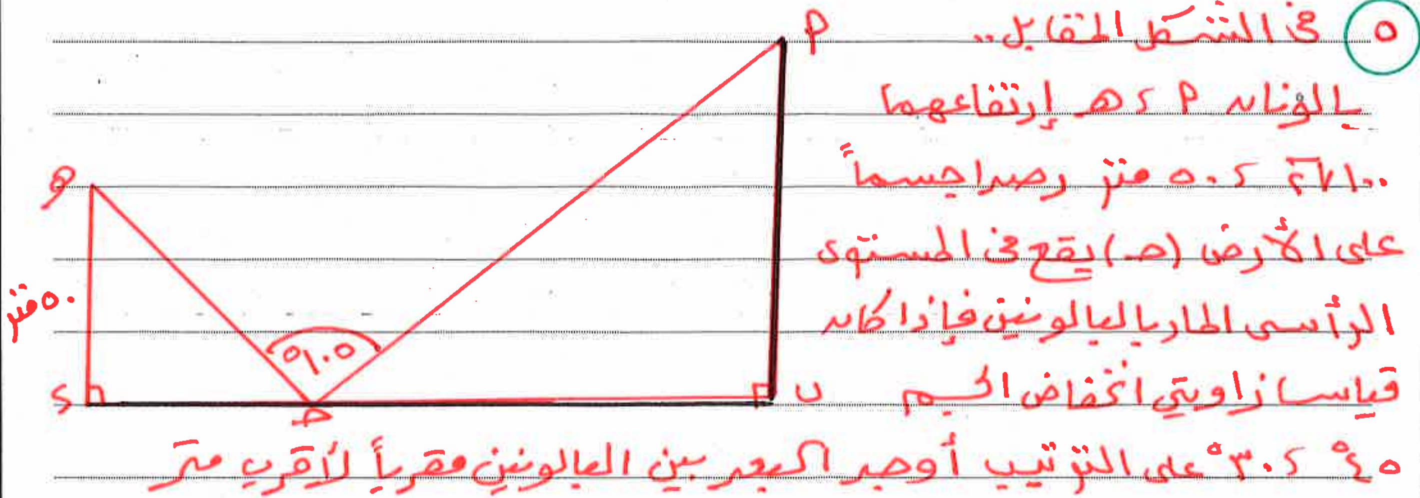
$\text{أ هـ} = \frac{٦ \times \text{جا } ٩٠°}{\text{جا } ٣٠°}$ ⟵ $\text{د هـ} = \frac{\text{أ هـ} \times \text{جا } ٤٥°}{\text{جا } ٧٥°} \simeq ٩$ متر

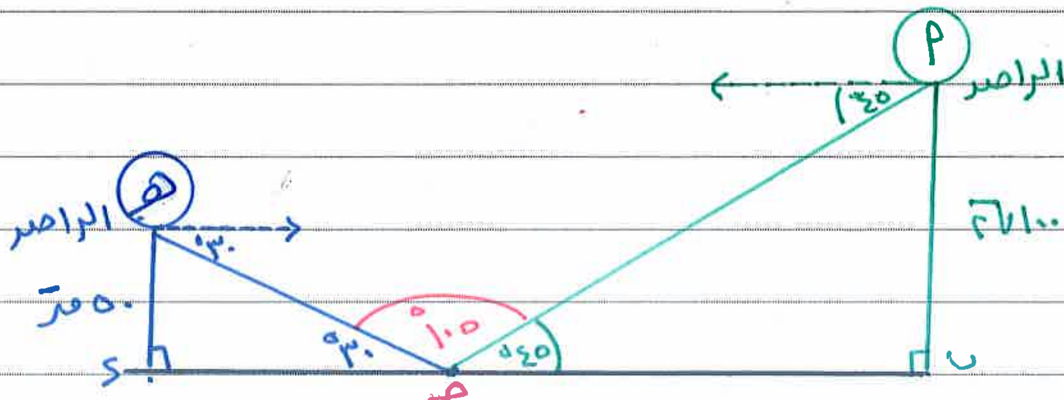
---

④ برج إرتفاعه ١٥٠ متر مقام على صخرة . من نقطة على سطح الأرض في المستوى الأفقي المار بقاعدة الصخرة قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجدتا ٦٣° ، ٤٢° على الترتيب أوجد إرتفاع الصخرة .



٥) في الشكل المقابل: البالونان أ ، ء هـ ارتفاعهما ١٠٠√٢ ، ٥٠ متر رصدا جسماً على الأرض (ص) يقع في المستوى الرأسي المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتي انخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب أوجد البعد بين البالونين مقرباً لأقرب متر





في Δ أ ب ص

جا ٤٥° = ١٠٠√٢ / أ ص

∴ أ ص = ٢٠٠ متر

في Δ هـ ء ص

جا ٣٠° = ٥٠ / هـ ص

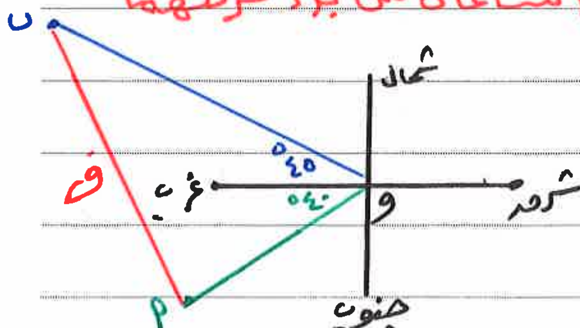
∴ هـ ص = ١٠٠ متر

في Δ أ ص هـ

(أ هـ)² = (٢٠٠)² + (١٠٠)² − ٢ × ٢٠٠ × ١٠٠ جتا ١٠٥

∴ أ هـ ≃ ٢٤٦ متر

٦) تحركت سفينة بسرعة ١٢ كم/س في اتجاه ٤٠° جنوب الغرب وفي نفس اللحظة ومن نفس المكان تحركت سفينة أخرى بسرعة ٢٠ كم/س في اتجاه الشمال الغربي أوجد البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات من بدء حركتهما



مسافة الأولى و أ = ١٢ × ٣ = ٣٦ كم

مسافة الثانية و ب = ٢٠ × ٣ = ٦٠ كم

ف² = (٣٦)² + (٦٠)² − ٢ × ٣٦ × ٦٠ جتا ٨٥°

∴ ف ≃ ...... متر

مجموع وفرق بين زاويتين

١) جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

٢) جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

تدريب ١ بدون إستخدام الحاسبة أوجد قيمة

١) جا ٧٥°   ٢) جتا ١٥°

الحل

١) جا ٧٥° = جا (٤٥° + ٣٠°)

= جا ٤٥° جتا ٣٠° + جتا ٤٥° جا ٣٠°

= $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

∴ جا ٧٥° = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

٢) جتا ١٥° = جتا (٤٥° − ٣٠°)

= جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠°

= $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

∴ جتا ١٥° = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ملحوظة الزوايا الخاصة ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° أشهر الزوايا بدون إستخدام الحاسبة

١٥° = ٤٥° − ٣٠°   ٧٥° = ٤٥° + ٣٠°   ١٠٥° = ٤٥° + ٦٠°

تدريب ٢ بدون إستخدام الحاسبة أوجد قيمة :

١) جا $\frac{\pi}{8}$ جتا $\frac{\pi}{24}$ + جتا $\frac{\pi}{8}$ جا $\frac{\pi}{24}$

٢) جتا ٣٧° جتا ٧° + جا ٣٧° جا ٧°

الحل

١) المقدار = جا ($\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{24}$)

= جا $\frac{4\pi}{24}$ = $\frac{1}{2}$

٢) المقدار = جتا (٣٧° − ٧°)

= جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

٣) ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظا أ ظا ب}}$ ظا (أ − ب) = $\frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{1 + \text{ظا أ ظا ب}}$

تدريب ٣ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :

① $\frac{\text{ظا } ٣٠° + \text{ظا } ١٥°}{١ - \text{ظا } ٣٠° \text{ ظا } ١٥°}$

② $\frac{\text{ظا } ٦٨° - \text{ظا } ٢٣°}{١ + \text{ظا } ٦٨° \text{ ظا } ٢٣°}$

الحل

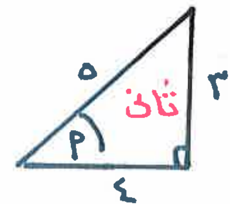
المقدار = ظا (٣٠° + ١٥°)
= ظا ٤٥° = ١

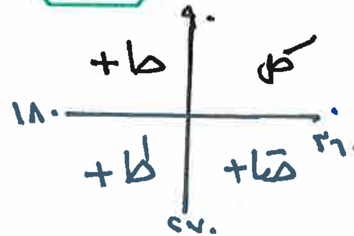
المقدار = ظا (٦٨° - ٢٣°)
= ظا ٤٥° = ١

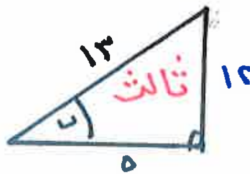
تدريب ٤ إذا كان: ظا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٩٠° < أ < ١٨٠° ، جتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$ حيث ١٨٠° < ب < ٢٧٠°

أوجد قيمة : ○ ظا (أ + ب) ○ جتا (أ - ب) ○ ظا (أ + ب)

الحل











تدريب ٤

إذا كانت شدة التيار الكهربائي ت تعطى بالعلاقة $ت = \frac{ه}{٢}$ ظا ١٦٥° ن :-

(١) أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام مجموع قياسي زاويتين

(٢) أوجد شدة التيار الكهربائي بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

الحل

لاحظ (i) عند عدم استخدام الحاسبة لازم نستخدم الزوايا الخاصة ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°

أو الزوايا ١٥° ، ٧٥° ، ١٠٥° كما سبق

(ii) خلي بالك من الزوايا المنتسبة (٩٠° ± θ) ، (١٨٠° ± θ)

(١) $ت = \frac{ه}{٢}$ ظا (٩٠°ن + ٧٥°ن)

(٢) عند ن = ١ ⇐ $ت = \frac{ه}{٢}$ ظا (٩٠° + ٧٥°)

لاحظ ظا (٩٠ + θ) = -ظتا θ

$= -\frac{ه}{٢}$ ظتا ٧٥°

$= -\frac{ه}{٢}$ ظتا (٤٥° + ٣٠°)

$= -\frac{ه}{٢}$ (ظتا ٤٥° ظتا ٣٠ - ظا ٤٥ ظا ٣٠) $= \frac{٢٧٥ - ٦٧٥}{٨}$

تدريب ٥

(١) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن ظا (أ + ب) =

(أ) ١ (ب) $\frac{٥-}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

---

(٢) في Δ أ ب جـ يكون : ظا (أ + ب) =

(أ) ظا أ + ظا ب (ب) ظا أ ظا ب + ظتا أ ظتا ب (ج) -ظتا جـ (د) ظا جـ

---

(٣) إذا كان س + ص + ع = $\frac{ط}{٢}$ فإن ظا س ظا ص + ظا ص ظا ع + ظا ع ظا س =

(أ) صفر (ب) -١ (ج) ٢ (د) ١

---

(٤) أ ب جـ Δ فيه : ظا أ = $\frac{١}{٧}$ ، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ فإن ق (∠جـ) = ..

(أ) ٤٥° (ب) ١٥٠° (ج) ١٣٥° (د) ١٨٠°

قوانين ضعف الزاوية

① $جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ$ ——— جا(زاوية) = ٢ جا $\frac{زاوية}{٢}$ جتا $\frac{زاوية}{٢}$

② $جتا ٢أ = جتا^٢ أ - جا^٢ أ$ ——— جتا(زاوية) = جتا² $\frac{زاوية}{٢}$ − جا² $\frac{زاوية}{٢}$

③ $ظا ٢أ = \frac{٢ ظا أ}{١ - ظا^٢ أ}$ ——— ظا(زاوية) = $\frac{٢ ظا \frac{زاوية}{٢}}{١ - ظا^٢ \frac{زاوية}{٢}}$

ملحوظة

① $جتا ٢أ = ٢ جتا^٢ أ - ١ = ١ - ٢ جا^٢ أ$

② $جا أ جتا أ = \frac{١}{٢} جا ٢أ$

تدريب ١: بدون إستخدام الحاسبة أوجد قيمة :-

① $٢ جا ١٥° جتا ١٥°$ ② $٢ جتا^٢ ٢٢\frac{١}{٢}° - ١$ ③ $\frac{٢ ظا \frac{π}{٨}}{١ - ظا^٢ \frac{π}{٨}}$

الحل

① $٢ جا ١٥° جتا ١٥° = جا ٣٠° = \frac{١}{٢}$

② $٢ جتا^٢ ٢٢\frac{١}{٢}° - ١ = جتا ٤٥° = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

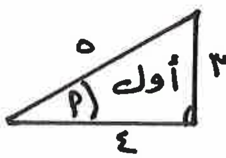
③ $\frac{٢ ظا \frac{π}{٨}}{١ - ظا^٢ \frac{π}{٨}} = ظا \frac{π}{٤} = ١$

تدريب ٢: إذا كان : $ظا أ = \frac{٣}{٤}$ حيث $أ \in]٠ ، \frac{π}{٢}[$ أوجد بدون استخدام الحاسبة

① $جا ٢أ$ ② $جتا ٢أ$ ③ $ظا ٢أ$

الحل

$جا أ = \frac{٣}{٥}$ ، $جتا أ = \frac{٤}{٥}$ ، $ظا أ = \frac{٣}{٤}$



① $جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥}$ ∴ $جا ٢أ = \frac{٢٤}{٢٥}$

② $جتا ٢أ = جتا^٢ أ - جا^٢ أ = \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥}$ ∴ $جتا ٢أ = \frac{٧}{٢٥}$

③ $ظا ٢أ = \frac{٢ ظا أ}{١ - ظا^٢ أ} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}}$ ∴ $ظا ٢أ = \frac{٢٤}{٧}$

تدريب ٣

أثبت صحة المتطابقة : قتا ٢س + ظتا ٢س = ظتا س

الحل

$$\text{الأيمن} = \frac{١}{\text{جا}\,٢س} + \frac{\text{جتا}\,٢س}{\text{جا}\,٢س} = \frac{١ + \text{جتا}\,٢س}{٢\,\text{جا}\,س\,\text{جتا}\,س} = \frac{١ + ٢\,\text{جتا}^٢س - ١}{٢\,\text{جا}\,س\,\text{جتا}\,س} = \frac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}\,س} = \text{ظتا}\,س$$

تدريب ٤

إذا كان ٤ جتا ٢هـ + ٣ جا ٢هـ = ٠ ، أوجد قيمة ظا هـ حيث هـ زاوية حادة

الحل

$\because$ ٤ جتا ٢هـ = −٣ جا ٢هـ $\Leftarrow$ $\therefore \frac{\text{جا}\,٢هـ}{\text{جتا}\,٢هـ} = -\frac{٤}{٣}$ $\Leftarrow$ ظا ٢هـ $= \frac{-٤}{٣}$

$\therefore \frac{٢\,\text{ظا}\,هـ}{١ - \text{ظا}^٢هـ} = \frac{-٤}{٣}$ $\Leftarrow$ ٦ ظا هـ = −٤ + ٤ ظا²هـ

$\therefore$ ٢ ظا²هـ − ٣ ظا هـ − ٢ = ٠ . بالتحليل باستخدام الحاسبة

$\therefore$ ظا هـ = ٢ ، ظا هـ $= -\frac{١}{٢}$ مرفوض [هـ زاوية حادة]

تدريب ٥

(١) إذا كانت جتا هـ $= \frac{١}{٣}$ فإن جتا ٢هـ =

(أ) صفر (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (ج) $\frac{-٧}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٢) جتا²هـ − جتا ٢هـ =

(أ) جا هـ (ب) جتا هـ (ج) جا²هـ (د) ظا هـ

(٣) ١ + جتا ٤م يساوي

(أ) ٢ جتا² ٤م (ب) جتا² ٢م (ج) جتا² ٤م (د) ٢ جتا² ٢م

(٤) إذا كان $\frac{\text{ظا}\,س}{١ - \text{ظا}^٢س} = \frac{٥}{٢}$ فإن ظا ٢س =

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (ج) $\frac{٢}{٥}$ (د) ٢

(٥) إذا كان : جتا⁴س − جا⁴س = جتا أس فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٦